

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд за присъждане на образователна и научна
степен „Доктор“

на тема:

Възможности за използване на фракталните стохастични процеси за оптимизиране на оценката на финансови активи

Задочен докторант:
Петър Стефанов Рангелов

Научен ръководител:
Проф. д-р Димитър Ненков Ненков

Резюме

Проектът на дисертационен труд на тема „Възможности за използването на фракталните стохастични процеси за оптимизиране на оценката на финансовите активи“ се състои от въведение, изложение в три глави, заключение и библиография. Обемът на дисертационния труд е в размер на 223 страници, от които основният текст е в размер на 197 страници. Използвани са 202 източника, от които 11 са на български език и 191 на английски език, 44 източника са книги, два източника са база данни, а останалите са статии, публикувани в научни журналы или онлайн издания. Приложен е списък на използваните съкращения, списък на фигурите (3), списък на графиките (12) и списък на таблиците (60).

Авторът на дисертационния труд е докторант в задочна форма на обучение към катедра „Финанси“ на Университета за Национално и Световно Стопанство.

1. Обща характеристика на дисертационния труд

1.1. Актуалност на изследването

Едно от главните обстоятелства, с които се сблъсква определен икономически агент по отношение на инвестиционните си решения е определянето на техния рисков профил. Всички количествени измерители на риска във финансите имат за цел да обединят и капсулират набор от различни по характер, структура и първоизточник поведенчески модели проявления, на които са действията на икономическите субекти. Следователно, математическото и статистическо описание на финансовите пазари е епидермално проявление на много по-сложни взаимовръзки на човешко поведение по отношение на взимането на инвестиционни решения.

Повече от век икономистите се опитват да анализират риска, да го обяснят и измерят, и в крайна сметка да се възползват от него с цел печалба. Конвенционалното схващане във финансите по отношение на измерването на риска на определена променлива или обект на интерес от страна на инвеститорите е дълбоко вкоренената икономическа мисъл и представата, че историческата волатилност на дадена променлива е добър измерител на несигурността и риска. Практиката и емпиричните изследвания показват недостатъци на тази теза. Възприетият подход в настоящата дисертация е разглеждането и възприемането на пазарните стойности, като непредсказуеми и неконтролируеми, от което следва, че най-добрият начин за прогнозирането им е чрез определянето на вероятност от реализирането на дадена интервална стойност. Използването на вероятностния подход не значи непременно, че шансът направлява изцяло социално-икономическите явления, но автора на изследването възприема тезата, че е най-добрия инструмент за анализ и прогноза на поведението на финансово-икономическите явления.

Нещо повече, върху сложни динамични системи, каквито са развитите финансови пазари, въздействие оказват множество фактори. Следователно, когато дадено явление се генерира и е следствие от неизброимо множество от причини, приложението на фундаменталния анализ може да обясни само общите тенденции и базови закономерности, които в някои случаи дори могат да бъдат безполезни, тъй като при определени обстоятелства локалната турбуленция може да създаде поредица от самозасилваща се каскада от непредсказуеми събития, водещи до нелинейни

проявления и асиметрични ефекти на изследваното от наблюдателя икономическо явление.

Според автора, актуалността на дисертационния труд произтичаща от изследването на влиянието на вероятностния подход върху обяснението на финансово-икономическите процеси, се обуславя поради следните по-важни фактори:

- Светът, в който живеем е непредсказуем, още повече – непредсказуемостта е втъкана в нашето ежедневие. Липсата на пълно познание по отношение на процесите и взаимозависимостите, които движат социално-икономическите системи в много от случаите ни ограничава да извлечем и направим абсолютна прогноза (а дори и в много от случаите достатъчно добро приближение) на дадено изследвано от нас явление. Тъй като е обективно невъзможно да извлечем цялата нужна информация по отношение да дадена система и следователно да направим заключение и прогноза за нейното поведение, приемането, че сложни системи се държат, като непредсказуеми и тяхната динамика може да се опише спрямо някакъв случаен процес е най-доброто, което можем да направим с цел да изградим прогноза и вземане на решения на тази база.
- Вероятностният подход третира, взаимовръзката на множеството фактори оказващи влияние на дадена резултативна променлива, като процес частично генериран от случайност. Случайността е трудна за възприемане идея, която се сблъсква с наблюдаемите факти и интуитивните разбирания. В социално-икономическата сфера и в частност, във финансите тя се сблъсква с концепцията за причинно-следствена връзка, икономическа рационалност, дори и със свободната воля. Лесно е да се види, че даден случаен процес може да създаде свои структурирани закономерности, но е трудно да се докаже, че подобни закономерности могат да представляват устойчива проекция на човешкото поведение по отношение на даден икономически стимул или явление.
- Класовете вероятностни процеси произтичащи от фракталната геометрия са едни от най-обещаващите и гъвкави средства за анализ и моделиране на финансовите пазари, които увеличават своя потенциал със засилваща се тенденция на развитие през последните десетилетия. Все още в научната

литература и практика не е достатъчно изследвана тяхната пригодност и потенциал в някои области на финансите, като например в сферата на оценяването на активи и деривати, както и в областта на управлението на риска и теорията и практиката на управление на инвестиционни портфейли.

Настоящият дисертационен труд изхожда от гореспоменатите концептуални наративи, в резултат на които е възприета тезата, че понятието за модел няма да препраща към обичайното си значение на математическата репрезентация на икономическите взаимозависимости. Вместо това ще се разбира, като статистически алгоритъм предназначен да осъществи обхващане на голям брой емпирични наблюдаеми факти чрез логическото им извеждане от възможно най-малък брой хипотези и аксиоми. Фундаменталният механизъм на самите модели е обусловен посредством генерирането на голям брой изкуствени паралелни линии на причинно-следствени връзки, с помощта на които да бъдат възпроизведени дълги вериги от възможни последствия. По този начин идеалният модел за обяснението на изменението на цените е този, който “произвежда изкуствено симулирани такива, които е трудно да се разграничат от реално наблюдаваните” ([Mandelbrot, 1997](#)).

Основната област в обхвата на изследването е свързана с представянето на фундаменталните принципи на фракталната геометрия и тяхното приложение във финансите в две основни направления.

- **Описание на динамиката свързана с изменението на ценовото равнище с течение на времето.**
- **Използване на фракталния анализ в областта на оценяването на инвестиционни проекти и предприятия, както и ценообразуването на финансови опции.**

Прилагането на алтернативен подход в сферата на оценяването на различни активи може да доведе до значително по релевантни оценки и взимането на информирани инвестиционни решения. Във все по-развиващите се финансови пазари неминуемо разнообразието от финансови и реални активи расте, а с това и обяснението на тяхното поведение придобива нови измерения. Настоящото изследване цели да постави именно акцент към подходите и някои от моделите за описание и прогнозиране на поведението на цените и техните възвръщаемости на различните активи в по широка рамка, а именно в областта на оценяването.

1.2. Обект и предмет на изследването

Обектът на дисертационния труд е фракталният анализ и приложенията му в областите на моделиране на ценовата динамика на активите, с оглед възможно използване при ценообразуването на финансови опции, оценяването на инвестиционни проекти и цели предприятия.

Предмет на изследване са фракталните модели използвани във финансите.

Основната област на темата на дисертационния труд е фракталния анализ и приложението му в областта на моделирането на ценовото изменение на активите с течение на времето и последващото му прилагане в областта на оценяване на опции и предприятия. В тази връзка обхватът на изследването е интердисциплинарен, включвайки както области от корпоративните финанси в т.ч. ценообразуване на деривати, капиталови пазари, подходи за оценяване на компаниите и техните акции, така и специфични направления в областта на статистиката и финансовата иконометрия, в т.ч. иконометрично моделиране на времеви редове, методи за оценка на параметрите на иконометрични модели, диагностика на остатъчния компонент, стимулационни методи и прогнозиране.

1.3. Изследователска теза и хипотези на изследването

Изследователската теза на изследването, не е продукт на дефинирането на единствено твърдение подлежащо на теоретично и емпирично доказване или анализ с цел синтезирането на определени качествени и количествени показатели, които притежава, а набор от каскадни явления всяко, от които подлежи на отделен преглед посредством методи с различна степен на доказателствена сила, в зависимост от относителната значимост на явлението и мястото му в логическата последователност на изследването. По същество и в обобщена форма, **изследователската теза гласи, че** чрез използването на инструментариума на фракталния анализ може да се изследват в по-голяма цялост и ефективност финансово-икономически процеси, като в частност в настоящото изследване този тип анализ е приложен в анализирането на ценовото поведение на различни типове финансови активи, както и в областта на тяхното оценяване.

В тази връзка са дефинирани и следва да се проверят следните работни хипотези:

Хипотеза 1: Анализирането на ценовите движения на активите посредством реконструкцията на статистическите характеристики на генериращия ценови процес, чрез фракталния анализ, представлява по-обоснован и правдоподобен метод за анализ и взимане на решения.

Хипотеза 2: Избраният работен фрактален модел обяснява динамиката във възвръщаемостите на активите в по-голяма степен спрямо избрани водещи иконометрични сравнителни модели от предварително дефинирана контролна група.

Хипотеза 3: Количествените метрики произтичащи от фракталния анализ представят по-широкообхватно и в по-голяма пълнота рисковата структура на финансовите активи, като същите допълват класическите количествени показатели.

Хипотеза 4: Фракталният анализ е в състояние да подобри и оптимизира процеса на оценяване на инвестиционни проекти, цели предприятия и някои класове деривати, в частност финансови опции.

1.4. Цел и задачи на изследването

Основната цел на дисертационния труд е да изследва възможностите от използването на инструментариума на фракталната геометрия в областта на анализирането на ценовата динамика на финансовите активи, извличането на по-правдоподобни и интуитивни рискови метрики за финансов анализ, и приложението ѝ в областта на оценяването на финансови активи.

В по-конкретен план, за доказване и постигане на основната цел, същата може да се разложи на следните изследователски задачи:

1. Изследване на емпиричните характеристики на избрана група от финансови активи.
2. Разширено изследване на разработените финансови модели адресиращ проблематиката свързана с описанието и обяснението на наблюдаваните статистически характеристики и аномалии проявяващи се върху динамиката на цената на финансовите и стокови активи.

3. Проучване на специализираната научна литература свързана с разработените фрактални модели, използвани във финансите и избор на работен фрактален модел за целите на изследването.
4. Дефиниране на основния представен в изследването фрактален процес – достъпност до бази данни, икономическа логика, иконометрично построение на модела, методи за намиране на параметрите на модела, статистическа проверка за адекватност, калибриране, критерий за прогностична ефективност.
5. Литературен преглед и избор на подходяща контролна група иконометрични модели.
6. Сравнителен анализ на резултатите от количествените критерии за сходимост към данните и прогностичната сила между използвания фрактален модел и моделите от контролната група.
7. Кратък литературен преглед на подходите и моделите за оценка на компании и техните акции.
8. Икономическа обосновка на използваните допускания и концептуална проверка на логическата последователност на работния мултифрактален процес.

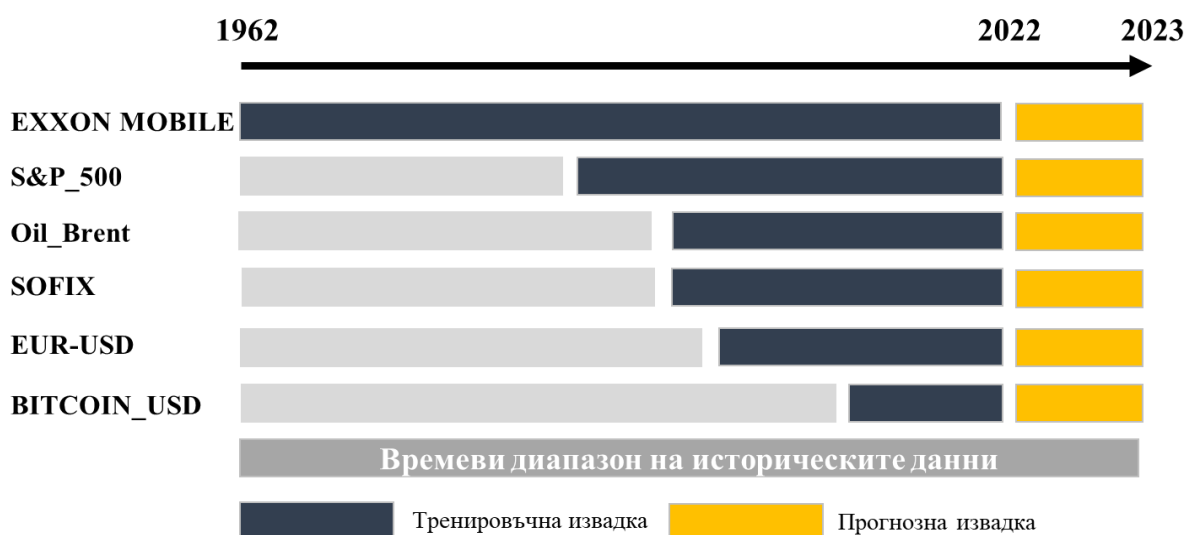
1.5. Обхват и източници

Обхватът на изследването може да се раздели на времеви и пространствен. **Пространственият обхват** е неограничен, но преимуществено ще се ползват данни главно от САЩ и Европа. По-конкретно, за целите на емпиричната част са използвани данни за шест актива – цената на петрола сорт „Брент“, цената на акциите на EXXON MOBILE, българския основен борсов индекс SOFIX, цената на BITCOIN деноминирана в долари, валутния курс на двойката Евро-Долар и стойността на борсовия индекс Standart and Poors 500.

Времевият обхват по отношение на събиране и зареждане на данните в моделите на практика е ограничен единствено и само от възможността за лесно и без загуба на време и разходи, намиране на публично достъпни бази данни. В частност, са използвани времеви редове с различна дължина варираща в периода между 1962 г. до средата на 2023 г. За всеки от динамичните редове ще бъдат определени две извадки. Едната, „тренировъчна“ (in-sample) ще служи за зареждане и оценяване на параметрите

на модела, а другата, „прогнозна“ (out-of-sample) ще служи за сравнителен анализ между прогнозираните стойности и фактическите реализации. Обобщение на изследваните активи, извадковото разпределение и дължината на времевите редове е както следва:

Фигура 1. Обобщение на използваните данни, дължината на времевите редове и разпределението на извадките



Използваните бази данни за целите на статистическия и иконометричен анализ са набавени от публични източници и по-конкретно от:

- Yahoo Finance – база от данни за текуща и историческа информация на публични компании, индекси и други финансови активи.
- Federal Reserve Economic Data (FRED) – система от база от данни поддържана и администрирана от Федералната банка на Сейнт Луис, част от Федералната резервна система от банки.
- Investor.BG – онлайн източник поддържащ база от данни за стойността на българските борсово котиран индекси.

1.6. Методология на изследването

Използваната методология в изследването е индивидуално обособена в зависимост от поставените хипотези подлежащи на анализ, доказване или отхвърляне.

Използваната методология свързана с дефинираната първа хипотеза от настоящия дисертационен труд, изследваща предимствата от използването на вероятностните процеси (в частност фракталните такива) от гледна точка на анализирането на ценовите движения на активите посредством реконструкцията на статистическите характеристики на генериращия ценови процес, спрямо класическия фундаментален анализ, е следната:

- **Проучване на специализираните литературни източници**, главно свързани в две направления: областта на фракталния анализ и фракталните и мултифрактални модели използвани във финансите.
- **Хипотетичен метод**, по отношение на поставянето на определени допускания и рамки, главно теоретични, имащи роля при изграждането на логическата и концептуална основа, на база на която ще бъде изградена цялата дисертация.
- **Историко-логически подход**, във връзка с историческия преглед на теоретичните основи положени с течение на времето от най-значимите имена в науката свързана, не само със социално-икономическата теория, наука и практика, но и с изследователи в естествените и природни науки, чийто идеи намират широко приложение в една или друга насока в настоящата разработка. Логиката на взаимовръзките ще се основава на стриктното прилагане на научния подход.
- **Теоретико-методологичен анализ**, използван с цел поставяне на солидни теоретични фундаменти, почиващи на логическа причинно-следственост, на база на които в последствие да се построят и обосноват реалистични допускания и емпирично тестване на изследваните явления спрямо предварително поставените цели.

Използваната методология свързана с експерименталното изследване относно втора и трета хипотези изследващи (1) динамиката на ценовите флукуации моделирани посредством мултифракталния модел сравнени с избрана контролна група водещи иконометрични модели и (2) количествените метрики за

рисков анализ на финансовите пазари произтичащи от фракталния анализ, е следната:

- **Статистически анализ** свързан с предварително дефинираните статистически бази данни от избраните активи. Върху избраните динамични редове са приложени серия от статистически анализи, а именно: тестове за нормалност на разпределението на възвръщаемостите в т.ч. тестове на Жарк-Бера и тест на Крамър вон Мизес, тестове за наличие на серийна авокорелация и дългосрочна памет включващи теста на Люнг-Бокс, теста на Бокс-Пийрс и анализ на премащабирането (и свързания с него коефициент на Хърст), тестове за хетероскедастичност на стохастичната компонента включващ теста на Енгъл за наличие на ARCH ефекти, както и тестове за стационарност и наличие на единичен корен включващи разширения тест на Дики-Фулър и KPSS критерия.
- **Иконометрично моделиране и диагностика**, във връзка с:
 - Конструирането на основния мултифрактален стохастичен модел предмет на анализ — непрекъснатата биномна версия на превключващ мултифрактален модел на Марков (*continuous binomial Markov-switching multifractal model*).
 - Избор и представяне на контролната група сравнителни иконометрични модели от семейството на авторегресионните хетероскедастични модели с условна вариация.
 - Избор на подходяща техника за оценка на параметрите на моделите спрямо данните от тренировъчната извадка. Параметрите на мултифракталния модел, както и на контролната група модели са оценени посредством метода на максимално правдоподобие.
 - Авторът на дисертационния труд е конструирал мултифракталния модел, иконометричните модели от контролната група, както и оценяването на техните параметри посредством използването на програмен език [Python](#).
- **Сравнителен анализ**, използван главно по отношение на прегледа на конкуриращите се стохастични модели, които осигуряват вероятностен закон спрямо дефинирането на различни допускания, както и сравнението и избора на най-подходяща техника за решаването на определения проблем включвайки:

- Дефинирането на теста на Вуонг целящ да определи посредством статистическа проверка на хипотеза най-добрия мултифрактален модел измежду множество конкуриращи се такива.
- Представянето на избраните диагностични критерии, спрямо които е направен избор между моделите с най-висока обяснителна способност от гледна точка на сходимостта им към наблюдаваните данни, включващи конструирането на функция на правдоподобие и два от най-често използваните информационни критерия – информационен критерий на Акайке и информационен критерий на Шварц.
- Избор на подходящи функции на загуба (loss function), както и извършването на регресионен анализ на Mincer-Zarnowitz целящ да сравни прогностичната сила на моделите. Резултатите от горните анализи са извършени чрез приложението на програмния език [Python](#).
- Симулационно-визуално конструиране на изкуствено генерирани финансови данни и сравнителен анализ спрямо реално наблюдаваните данни. Симулациите са осъществени чрез приложението на програмния език [Python](#).
- Извеждане на основните количествени измерители произтичащи от фракталния анализ в т.ч. алфа коефициент, експонента на Хърст и фрактално измерение. Съответно, изброените метрики са генерирани посредством използването на софтуерен продукт [MATLAB 2016a](#).

Използваната методология свързана с четвъртата хипотеза от изследването свързана с използването на фракталния анализ в областта на оптимизирането на процеса на оценяване на инвестиционни проекти, цели предприятия и финансови опции.

- **Литературен преглед** посветен на проучването на наличния инструментариум за оценяване на компании и техните акции, както и на развитието на икономическия и математически процес свързан проблематиката на ценообразуване на финансови опции.

- **Индуктивен и дедуктивен анализ**, неразривно използван, като средство за теоретично доказване на логическа последователност на определено твърдение с цел извеждането на заключение (изходен резултат).
- **Критичен анализ**, спрямо главно теоретичните и практически постановки и допускания в областта на инвестиционното оценяване на финансови и реални активи.

1.7. Структура

Дисертационният труд е разделен на **въвеждаща част, три глави и заключение**, като детайлната структура е както следва:

- **Глава I** започва с исторически и литературен преглед на базовите статистически характеристики наблюдавани на различните пазари и финансови инструменти. Изведени и дефинирани са главните значими и константни проявяващи се явления, като прелюдия към въведението във фракталния и мултифракталния анализ. Следващият компонент от първа глава представя принципите за обяснение на икономическите явления базирани на количествения анализ репрезентиран чрез общата теория на сложните динамични системи, както и чрез детерминистичните и вероятностни модели за финансов анализ. В тази връзка е направен ретроспективен преглед на водещите подходи за вероятностно моделиране на ценовите процеси на финансовите и реални активи. На следващо място е обособено въведение във фракталната геометрия, както и исторически и литературен преглед на фракталните модели използвани във финансите. Първа глава завършва с кратък литературен преглед и пригодност на подходите и моделите за оценка на компании и финансови опции с оглед на възможното приложение на фракталните модели в тези две важни области на финансовата наука и практика.
- **Глава II** е насочена към емпиричната проверка на основната хипотеза на дисертационния труд посредством създаването на методология за сравнителен анализ между водещи иконометрични модели и основния фрактален модел. Избраният фрактален модел обект на изследването е спецификация на *непрекъснатата биномна версия на превключващ мултифрактален модел на*

Марков. В детайли е представена конструкцията на модел, предимствата и недостатъците му, както и подходите за оценка на неговите параметри. В допълнение, за да се прецени неговата обяснителна способност е конструирана симулационна методика за генериране на изкуствено създадени данни, с цел проверката на стабилността на параметрите на модела в зависимост от големината на извадките от данни, с които е зареден. Контролната група модели се състои от седем иконометрични модела от семейството на авторегресионните модели с условна хетероскедестичност на вариацията (ARCH-class). На следващо място са избрани количествени критерии и статистически тестове за сравнителен анализ и избор на най-добрия модел от гледна точка на неговата обяснителна способност, степен на сходимост към реалните данни и прогностична сила.

- **Глава III** е посветена на методическо изложение на използваните данни за целите на изследването, визуално-статистически анализ, като са представени основните резултати от изследването. За целите на моделирането, са избрани шест класа активи с различна дължина на времевите редове с цел всеобхватност. Данните на избраните активи са обект на задълбочен и подробен предварителен статистико-диагностичен анализ, включително са изведени и основните приложими фрактални метрики. Общите времеви редове на различните активи са разделени в две извадки – първата, тренировъчна извадка, служеща за зареждане на моделите и оценяване на техните параметри и обяснителна способност, и втората, прогнозна извадка, служеща за количествено измерване на прогностичната сила на конкуриращите се модели. Трета глава завършва с обобщение на резултатите от изследването за данните от тренировъчната и прогнозната извадки. За тренировъчната извадка са представени оценката на параметрите на фракталния модел и моделите от контролната група, на база диагностичните критерии е избрана най-добрата спецификация на мултифракталния модел и е направен сравнителен анализ между контролната група модели и фракталния. За прогнозната извадка са представени резултатите и тяхната адекватност от прогнозираните стойности генерирани от мултифракталния модел. В заключение е направен сравнителен анализ между симулираните данни от мултифракталния модел и реално наблюдаваните емпирични стойности на финансовите активи.

- В заключение са очертани изводите от направеното изследване.
- В края на дисертационния труд са представени използваните литературни източници.

2. Съдържание

Дисертационният труд е изготвен в следното съдържание.

СПИСЪК НА ИЗПОЛЗВАНИТЕ СЪКРАЩЕНИЯ

СПИСЪК НА ФИГУРИТЕ

СПИСЪК НА ГРАФИКИТЕ

СПИСЪК НА ТАБЛИЦИТЕ

ВЪВЕДЕНИЕ

1. Актуалност на изследването
2. Обект и предмет на изследването
3. Изследователска теза и хипотези на изследването
4. Цел и задачи на изследването
5. Обхват на изследването и използвани данни
6. Методология на изследването
7. Структура на дисертационния труд
8. Незасегнати области и задачи за бъдещи изследвания
9. Дефиниции

ГЛАВА I. ВЪВЕДЕНИЕ ВЪВ ФРАКТАЛНИЯ АНАЛИЗ

1. Емпирични характеристики на финансовите данни
 - 1.1. Наличие на дебели опашки във вероятностното разпределение на възвръщаемостите
 - 1.2. Концентрация на волатилността в компресирани времеви периоди
 - 1.3. Автокорелация и дълга памет
 - 1.4. Левъридж и нестационарност

- 2. Анатомия на динамичните системи
- 3. Детерминистични и вероятностни модели във финансите
 - 3.1. Геометрично Брауново движение (geometric Brownian motion)
 - 3.2. Процеси от типа обръщане към дългосрочната средна стойност (Mean-reverting)
 - 3.3. Стохастична волатилност (Stochastic volatility)
 - 3.4. Модели от семейството на Авторегресионната хетероскедастичност на условната вариация (ARCH)
 - 3.5. Скоково-дифузни процеси (Jump-diffusion)
 - 3.6. Сменящи режима модели (Regime-switching)
- 4. Фрактални модели във финансите
 - 4.1. Процеси на Леви
 - 4.2. Фрактално Брауново движение
 - 4.3. Мултифрактален модел на възвръщаемостта на активите
 - 4.4. Едномерен превключващ мултифрактален модел на Марков
 - 4.5. Двумерен и n-мерен превключващ мултифрактален модел на Марков
 - 4.6. Векторен превключващ мултифрактален модел на Марков с корекция на грешката
- 5. Интегриране на фракталния анализ към оптимизирането на оценката на финансови активи
 - 5.1. Преглед на подходите и моделите за оценка на компаниите и техните акции
 - 5.2. Приложение на фракталните процеси в процеса на оценяване на предприятия чрез моделите от семейството на Дисконтираните парични потоци
 - 5.2.1. Оперативна стойност на активите на компанията
 - 5.2.2. Градивна структура на свободните парични потоци
 - 5.2.3. Приложение на фракталните модели в процеса на оценяването
 - 5.3. Стойност на опция при допускане на мултифрактален процес движещ динамиката на базовия актив

ГЛАВА II. МОДЕЛИРАНЕ И ПРОГНОЗИРАНЕ НА ВОЛАТИЛНОСТТА НА ФИНАНСОВИТЕ АКТИВИ ПОСРЕДСТВОМ ИЗПОЛЗВАНЕТО НА МУЛТИФРАКТАЛНИЯ АНАЛИЗ

- 1. Концепция на моделирането на възвръщаемостта и волатилността

2. Биномен превключващ мултифрактален модел на Марков
 - 2.1. Конструкция на модела
 - 2.2. Разпределение на мултипликативната компонента
 - 2.3. Методи за оценка на параметрите на модела
 - 2.3.1. Метод на максимално правдоподобие
 - 2.3.2. Симулиран метод на максимално правдоподобие
 - 2.3.3. Генерализиран метод на моментите
 - 2.4. Представяне на модела при малки извадки
3. Контролна група модели
 - 3.1. Генерализиран модел на авторегресионната хетероскедастичност на условната вариация (GARCH)
 - 3.2. Експоненциален генерализиран модел на авторегресионната хетероскедастичност на условната вариация (EGARCH)
 - 3.3. Генерализиран модел на авторегресионната хетероскедастичност на условната вариация на Глостен-Джаганатан-Рънкле (GJR-GARCH)
 - 3.4. Асиметричен модел на авторегресионната хетероскедастичност на условната вариация (TARCH)
 - 3.5. Асиметрично степенен модел на авторегресионната хетероскедастичност на условната вариация (APARCH)
 - 3.6. Частично интегриран генерализиран модел на авторегресионната хетероскедастичност на условната вариация (FIGARCH)
 - 3.7. Оценка на параметрите на моделите
4. Диагностични критерии
 - 4.1. Степен на сходимост на моделите към данните от тренировъчната (in-sample) извадка
 - 4.1.1. Функция на правдоподобие и информационни критерии
 - 4.1.2. Тест на Вуонг за избор на точна спецификация на мултифракталния модел
 - 4.2. Количествено измерване на прогностичната грешка за данните от прогнозната (out-of-sample) извадка
 - 4.2.1. Функции на загуба
 - 4.2.2. Регресия на Mincer-Zarnowitz

ГЛАВА III. ОСНОВНИ РЕЗУЛТАТИ И НАУЧНО-ПРИЛОЖНИ ПОСТИЖЕНИЯ НА ИЗСЛЕДВАНЕТО

1. Използвани данни и предварителен статистически анализ
 - 1.1. Нормалност на вероятностното разпределение: Тестове на Жарк-Бера и Крамър вон Мизес
 - 1.2. Автокорелация: Тест на Люнг-Бокс, Бокс-Пиърс и коефициент на Хърст
 - 1.3. Хетероскедастичност: Тест на Енгъл за ARCH ефекти
 - 1.4. Стационарност и наличие на единичен корен: Разширен тест на Дики-Фулър и KPSS критерий
 - 1.5. Количествен фрактален анализ
2. Резултати от изследването за данните от тренировъчната (in-sample) извадка
 - 2.1. Оценка на параметрите за контролната група модели
 - 2.2. Оценка на параметрите на превключващия мултифрактален модел на Марков
 - 2.3. Избор на най-добър мултифрактален модел
 - 2.4. Сравнителен анализ между контролната група модели и мултифракталния модел
3. Резултати от изследването за данните от прогнозната (out-of-sample) извадка
 - 3.1. Оценяване на прогностичната сила на фракталния модел – регресия на Mincer-Zarnowiz
 - 3.2. Симулация на възвръщаемостта от мултифракталните модели

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

3. Синтезирано изложение на дисертационния труд

3.1. Въведение

Въведението на дисертационния труд запознава читателя с основните концепции залегнали в изследването: актуалност на изследването, неговите обект и предмет, изследователската теза и работни хипотези, поставената цел и задачите, които авторът се стреми да постигне, обхватът на изследването и използваните данни, както и структурата на дисертационния труд.

3.2. Първа глава – Въведение във фракталния анализ

Първата глава на дисертационния труд представя въвеждаща теоретична обосновка и преглед на литературата свързана с възникването на фракталната геометрия и историческата ѝ еволюция свързана с приложението и във финансите. Потребността от въвеждането на фракталния анализ, като аналитичен апарат във финансите произтича от неспособността на традиционните финансови и иконометрични модели да опишат с необходимата степен на прецизност основните емпирично наблюдавани статистически феномени проявяващи се на финансовите пазари. Поради тази причина, първа глава започва именно с литературен преглед на най-честите статистически характеристики детерминиращи варирането на финансовите и стокови активи.

Сблъсъкът между подходите за правене на дескриптивен и прогностичен анализ е неизбежна последица произтичаща от предварителните допускания, които изследователите следва да правят в хода на анализа. Наличието на достатъчна и качествена информация също е елемент от процеса за избор на подход, който да бъде възприет. Имайки предвид горните причини може да се обособят в най-обща степен два големи подхода за анализ. Такъв базиращ се на изграждането на формални взаимовръзки и причинно-следствени вериги, които най-често се правят ретроспективно. Такъв подход е познат като фундаментален или детерминистичен. Вторият подход е свързан с въвеждането в процеса на анализа определена степен на несигурност и вероятност, която да има различен тип структура, пригодена към историческата динамика на изследваното явление. Това е т.н. вероятностен или стохастичен подход.

Имайки предвид, че фракталният анализ и фракталните модели попадат в обхвата на втория подход – вероятностният, авторът на дисертационния труд поддържа тезата, че именно този подход е най-подходящ, тогава когато анализираме ценовата динамиката на финансовите пазари и всички произтичащи от тях приложения в модерните финанси – управлението на инвестиционните портфейли от страна на инвеститорите, оценяването на активите, управлението на риска, множество приложения в областта на банковото дело и т.н.

Поради тези причини са представени основните вероятностни процеси разработени във финансите, както и е направен преглед на основните свойства на динамичните системи.

Първа глава завършва с представяне на възможностите за приложение на фракталния анализ в областта на оптимизирането и подобренето на оценяването на финансовите активи. Според авторът на изследването непосредствената пригодност на фракталния анализ в областта на оценяването е все още недостатъчно изследвана територия в областта на финансите и поради тази причина обогатяването на инструментариума при процеса на изготвяне на оценки би довело до много по-правдоподобни и теоретично обосновани оценки.

Представени са две потенциални приложения на фракталния анализ в областта на оценяването – в сферата на (1) традиционното бизнес оценяване на акциите на предприятия посредством моделите на дисконтираните парични потоци и (2) в областта на оценката на финансови опции. Целта е постигането и представянето на основните моменти и проблемни въпроси в процеса на оценяване, респективно представянето на възможностите на приложение на фракталния анализ за подобряване на някои от спорните въпроси и преодоляване на някои от допусканията, които неименуемо се правят в процеса на ценообразуване на някои финансови активи.

Емпирични характеристики на финансовите данни

Важността на анализирането и прегледа на емпиричните статистически характеристики на финансовите активи се предопределя от позицията на автора, че при анализа е необходимо да се избира такъв аналитичен подход или методика, която да успява да обясни възможно най-голям набор от наблюдавани емпирични характеристики на изследваното явление или обект.

Въпреки усилията на изследователите и практиците в устрема им да конструират математически възможно най-точно описващ реалната действителност количествен модел, всички до момента успяват в най-добрия случай да синтезират в базов порядък изследваните икономически процеси и зависимости. Въпреки това, поведението на финансовите пазари се характеризира с определен набор от повтарящи се закономерности, чиито произход на практика не може да бъде доказан посредством конструирането на стабилни вериги от причини и резултиращите им следствия.

Следователно, стремежът към извличането на причинно-следственост реконструираща определено явление е задача с повишена трудност, имайки предвид, че в по-голямата част от случаите анализаторите разполагат с ограничен достъп до информация.

Статистическите изследвания проведени в областта на финансите по отношение на поведението на цените и възвръщаемостите на активите показват недвусмислени закономерности проявяващи се на различни пазари, географски региони и видове търгувани активи. Основните емпирично наблюдаеми статистически характеристики, типични за повечето търгувани активи може да се обобщят, синтезират и представят по следния начин в следващата таблица:

Таблица 1. Основни статистически проявления на борсово търгуваните активи

Статистическа характеристика	Описание
Наличие на дебели опашки във вероятностното разпределение на цените и техните възвръщаемости	Екстремални стойности пораждащи изкривяване в честотното разпределение на цените и техните възвръщаемости водещи до несъответствие при определянето на теоретичната вероятност за проявлението им.
Приближение към Гаусово разпределение при увеличение на времевата скала на измерване	При големи извадки от динамични данни, увеличаването на скалата на измерване на вариацията между два последователни времеви периода се доближава до нормалното честотно разпределение в сравнение с по-къси времеви интервали на измерване на волатилността.
Отрицателна асиметричност на третия момент	Математическата интерпретация на това, че честотата на резките спадове е по-ниска в сравнение с честотата на положителните нараствания, но относителния им магнитуд е много по-голям сравнен с този при положителен тренд.
Компресиране на волатилността в клъстери	Турбулентното поведение на цените и тяхното вариране във времето се

	проявява в клъстероподобни отрязъци, като същите не са еднакво и равномерно разпределени в рамките на изследваната извадкова времева популация.
Левъридж ефект	Свързан е с отрицателната корелация на волатилността на актива и движението в неговата цена.
Прекъснато поведение на цените	Ценообразуването на търгуваните активи по определение не може да бъде непрекъснат във времето процес. Именно поради това моделирането би следвало да взема предвид скоковото поведение в цените, дължащо се на дискретния им характер.
Нестационарна волатилност	Вариращата във времето волатилност е типична за почти всички измервания направени на различни класове активи, независимо от времевата скала на измерването.

Детерминистични и вероятностни модели във финансите

Обяснението и прогнозирането на поведението на определен феномен в икономиката винаги е свързано с определена доза на несигурност произтичаща от множество и най-различни източници. Именно моделирането на несигурността влияеща върху поведението на явленията придава на същите вероятностни характеристики. Концепцията за вероятност много често е трудна за възприемане. Обикновено в науката тя се свързва с честотата на случването на дадено явление в миналото, което означава, че се допуска миналата закономерност на наблюдавания феномен да се запази и в бъдещето. *Този подход за измерване на вероятността е познат, като честотен или обективен подход* Carroll (2019). Съществува и субективен подход, който се заражда, поради това, че не всички събития притежават голяма повтораемост и следователно не може да се извлече честотна закономерност. *Субективната вероятност е част от теорията на Бейсовата статистика (Bayesian statistics).* Бейсовият метод ще бъде активно прилаган в областта на прогнозирането на

волатилността на основния фрактален модел, който ще бъде използван за целите на анализа.

Детерминизмът произхожда от концепцията за причинно-следствеността, която по своята дълбинна същност може да се проследи до класическите философски трудове на [Хюм \(2016\)](#), [Hume \(1738\)](#), [Popper \(1950\)](#) и [Laplace \(1902\)](#). Във финансите класическите детерминистични или причинно-следствени модели по начало са насочени към анализирането на определени минали събития и допускат, че установените взаимовръзки (включително и тяхната сила) и закономерности ще се запазят и в бъдещето.

Противоположност на детерминистичните модели във финансите са случайните или стохастични модели и процеси. Такъв подход за анализ на поведението на дадена променлива се обуславя поради няколко причини: Първо, имайки предвид съвсем реалистичното допускане, че по начало много от анализите се правят в среда на значително липсваща или сериозно обобщена информация, детайлизацията и получаването на относително сигурни измервания за стабилността на динамиката на определени променливи може да се постави основателно под въпрос. Второ, една от основните концепции в теорията на сложните системи гласи, че поведението на съвкупността не може да бъде предсказана по поведението на съставните ѝ части (както и обратното) поради все по-голямото взаимодействие и комплексност на връзките между единиците и цялото. [Taleb \(2018\)](#) твърди, че взаимовръзките имат главна роля и са от по-голямо значение от колкото базовите характеристики на съставните части. Изхождайки от тази логическа последователност, следва че върху цената на актива влияят огромно количество от фактори, много от които са латентни. Следователно, чисто детерминистичният подход за анализ и прогнозиране, следователно е твърде обобщаващ, особено когато са налице нелинейни взаимовръзки.

Една от най-трудните и предизвикателни области в моделирането на стохастични системи е калибрирането и описването на турбулентността на случайната компонента. Още повече, че същата може да притежава променлива структура и да бъде зависима от времето (*time dependent*).

Първоначално математическото моделиране на *поведението на цените респективно възвръщаемостта от инвестициите във финансови и реални активи* се извършва на база допускането, че миналите стойности на изследвания актив не

оказват влияние върху сегашната или бъдещата му стойност. Такова допускане се изгражда на база теоретична рамка позната в класическите финанси, като *теорията на ефективните пазари* Fama (1970), която гласи, че цялата налична информация на финансовите пазари цялата налична информация се отразява в цената на активите в много кратки срокове (на практика мигновено) и поради това миналото няма никакво отношение при прогнозирането на бъдещата цена на съответния актив. Математическото описание на икономическата концепция на ефективните пазари кореспондира с моделите от семейството на т.н. Марковски процеси или Марковски вериги, които на практика гласят, че днешната цена на актива зависи единствено от вчерашната ѝ цена, утрешната от днешната и т.н. В литературата съществуват и алтернативни теоретични конструкции целящи да опишат фундаменталните движещи сили формиращи цените на активите и поведението на пазарните участници. Струва си да се споменат *теорията за адаптивните пазари* разработена и систематизиране от Lo (2019), *хипотезата за фракталните пазари* предложена от Peters (1994) и интертемпоралните равновесни модели, чиито теоретични принципи за обяснението на цените на активите са свързани с взаимовръзката между инвестиционните и потребителски решения на инвеститорите. С други думи, методологията изхожда от това, че цените на активите са предопределени от колективните портфейлни решения на инвеститорите по отношение на тяхното бъдещо богатство в рамките на един период напред в бъдещето. Имплицитно модела допуска, че икономическите агенти консумират цялото си богатство в рамките на определения период. Разбира се, в реалността инвеститорите правят своите планове по отношение на портфейлните си предпочитания за повече от един период, като имайки предвид това, моделирането на инвестиционните и потребителските предпочитания в контекста на многовременни периоди, е необходимо да се направи паралелно. Според Campbell, Lo, MacKinlay (1997) интерпоралните равновесни модели използвани за моделиране на цените на активите дават отговор на много важни два въпроса: Какви причини предопределят нивото на безрисковия лихвен процент и нивото на допълнителната рискова премия, която инвеститорите очакват от своите инвестиции. И вторият въпрос е адресиран към анализа и построяването на равновесен модел направляващ поведението на стопанските субекти по отношение на максимизиране на полезността на техните инвестиции по такъв начин, че да бъдат обяснени нестационарните движения във възвръщаемостите и рисковите премии изисквани от пазарните субекти. Подробности и обобщаване на математическите постулати и техники по отношение на конструиране

на интерпоралните равновесни оптимизационни модели може да се намерят в труда на [Walde \(2012\)](#).

В класическите количествени финанси са заложени и редица други често нереалистични допускания, които са представени в обобщен вид в долната таблица.

Таблица 2. *Допускания при класическата финансова теория за поведение на финансовите пазари*

Допускания при класическата финансова теория	Коментар
Ефективни пазари (Марковски процес)	• За определянето на бъдещата стойност на дадена променлива е от значение единствено и само настоящата ѝ стойност. Кореспондира със "слабата теория за ефективните пазари". • Липса на арбитражни възможности.
Мартингалност (Martingale)	• Концепцията за честна игра, цялата информация е известна на всички пазарни агенти и никой не е в неравнопоставено положение.
Правило на Крамър	• Загубите са по-вероятни да дойдат от натрупване на множество събития, а не от едно единствено (<i>outlier</i>).
"Нормалност" и симетричност на честотното вероятностно разпределение на цените и техните възвръщаемости	• Липса на екстремални стойност в данните, лесно извеждане (и наличие) на централни моменти.
Рационално поведение на пазарните участници	• Стремек към максимална печалба. • Максимизиране на съотношението възвръщаемост-риск.

Основните типове подходи за описание на тенденции, закономерности и поведение на цените на различните видове активи условно може да се разделят в две големи групи: (1) такива, които обясняват даден процес с цел получаване на разбиране

за **източниците и взаимовръзките** определящи и движещи цената на актива и (2) прогностични модели (*inference*) с цел **предсказване** на стойностите на явлениято в определен бъдещ момент. Mandelbrot (2008) твърди, че цените на финансовите активи не могат да бъдат предсказани по какъвто и да било полезен и продуктивен начин, но рискът притежава структура, която може да бъде описана математически. Именно поради тази причина втората група модели (прогностичните) в повечето случаи не възпроизвеждат дадена точкова оценка на цената или респективно възвръщаемостта, а се стремят да имитират реалния динамичен процес характеризиращ определената вероятностно-претеглена траектория на явлениято.

Във финансовата иконометрия са известни няколко подхода и група от модели, които се използват за моделиране на финансово-икономическите явления. Същите могат да се обобщят, както следва:

- Геометрично Брауново движение (geometric Brownian motion);
- Скоково-дифузни процеси (Jump-diffusion);
- Процеси от типа обръщане към дългосрочната средна стойност (Mean-reverting);
- Стохастична волатилност (Stochastic volatility);
- Модели от семейството на Авторегресионната хетероскедастичност на условната вариация (ARCH);
- Сменящи режима модели (Regime-switching);
- Модели от семейството на машинното и дълбоко самообучение и
- Фрактални модели

Фрактални модели във финансите

Основополагащата изходна точка на фракталния анализ, разгледан в по-общ план, се осланя върху изследването на инвариантните статистически характеристики водещи до конструкцията на стабилни във времето класове от фрактални модели, възпроизвеждащи определен аспект на анализирания данни. Инвариантността позволява моделирането на ценовата вариация посредством едномерен генериращ данните процес, което води до възможността от конструкция на фрактални модели с малко на брой параметри, които в комбинация с възможността от статистически

обосновани допускания описващи точната качествена специфика на времевата стабилност, водят до възпроизвеждането на ценова динамика, която не се влияе от честотата на измерването.

Приложението на фракталния анализ в областта на финансите бележи своята начална точка от изследванията на [Mandelbrot \(1963 и 1967\)](#) свързани с поведението на ценовите равнища на различни класове финансови и реални активи. В научната литература могат да се намерят множество изследвания свързани със свойството на устойчивост на поведението на статистическите централни моменти. Изследванията на [Mandelbrot et al. \(1997\)](#), [Calvet и Fisher \(2002\)](#), [Bacry, Delour и Muzy \(2001\)](#), показват, че централните моменти q на абсолютните ценови изменения $\mathbb{E}(|P(t + \Delta t) - P(t)|^q)$ (абсолютна възвръщаемост на цената) се скалират, като степенна функция от изменението във времеви хоризонт. Именно резултатите от тези изследвания пораждат конструирането на моделите от семейството на мултифракталните дифузни процеси.

Хронологично първия фрактален модел е базиран на Леви-стабилното разпределение [Mandelbrot \(1963\)](#), който е насочен към количественото моделиране на въздействието на екстремалните проявления върху вариацията на цената. На по-късен етап е разработен и фракталното/частичното Бруново движение от [Mandelbrot and Van Ness \(1968\)](#), което успешно възпроизвежда концепцията за дългосрочната автокорелационна зависимост проявяваща се на множество от финансовите данни. Следват изследванията на [Mandelbrot \(1972\)](#) и [Mandelbrot et al. \(1997\)](#), в които се представя и конструира, първоначално добавящ елемент към фракталното Брауново движение, а именно субординационната връзка на мултифракталната мярка на времето за търговия на финансовите активи, а по-късно модела е доразвит и на негова база се появява модифицираната му версия, а именно *Мултифракталния модел на възвръщаемостта на активите*. В края на 20ти и началото на 21 век се появява и последната базова разновидност на финансови модели от семейството на фракталите – *превключващ мултифрактален модел на Марков*, разработен от [Calvet и Fisher \(2004\)](#), както и неговите множество разновидности.

Обобщение на разработените фрактални модели използвани във финансите може да бъде направено, както следва:

- Процеси на Леви;

- Фрактално Брауново движение;
- Мултифрактален модел на възвръщаемостта на активите;
- Едномерен и n-мерни превключващ мултифрактален модел на Марков и
- Векторен превключващ мултифрактален модел на Марков с корекция на грешката

Приложение на фракталните процеси в процеса на оценяване на предприятия чрез моделите от семейството на Дисконтираните парични потоци

Приложението на фракталния анализ в процеса на оценяването на предприятия посредством модела на Дисконтираните парични потоци може да бъде вграден чрез симулиране на променливите генериращи основните носители на стойността. Обикновено, това са приходите от продажби, но не е изключено да бъдат моделирани и други променливи съставляващи паричните потоци. Стохастичната променлива обект на моделирането посредством някой от водещите фрактални модели за целите на анализа е най-удачно да бъдат приходите от продажби.

Приложението на фракталните модели не бива да се прави самоцелно, а да е на база на предварителен анализ взимащ предвид индивидуалните специфики на анализираното предприятие. Например, динамиката на приходите на предприятия, които се намират в своята зряла фаза на развитие предполага тяхната динамика да бъде константна без резки движения. Следователно, приложението на фракталния анализ в такива хипотези е ограничено, поради това, че за такъв тип компании процесите от типа на обръщане към дългосрочната средна стойност са най-подходящи за приложения. Моделирането на динамиката на приходите чрез фракталния анализ се предопределя от техния динамичен характер. Най-подходящи са компаниите опериращи в среда на повишена несигурност именно защото фракталните модели успяват да адресират моделирането на несигурността по подходящ начин. Друго предизвикателство за приложението на фракталния анализ и по-конкретно някоя от спецификите на фракталните модели е оценката на техните параметри и набавянето на достатъчно аналитични и подробни данни.

Стойност на опция при допускане на мултифрактален процес движещ динамиката на базовия актив

Втората важна област на приложение на фракталния анализ е свързана с построяването на консистентна, логически-последователна и максимално всеобхватна методология целяща да опише и дефинира подходите, допусканията и проблематиката свързана с концепцията за ценообразуване на финансови опции и възможностите на приложението на фракталния анализ към подобряване и оптимизиране на някои от допусканията стоящи в основата на ценообразуването.

Една от най-трудоемките задачи при практическото използване на подхода на опционно оценяване в сферата на инвестиционния мениджмънт е базовия икономически аргумент, върху който се гради оценяването. Той се изразява в конструирането на „синтетичен“ портфейл, който перфектно да имитира функцията на изплащане от опцията (*payoff function*). Нещо повече, необходимостта от динамично ребалансиране, на теория непрекъснато във времето, е основен постулат, чийто резултат е елиминиране на целия системен риск и гарантиране на риск-неутрална възвръщаемост. Изпълнението на всички тези условия на практика е почти невъзможно. Допълнителна трудност е също и дефинирането на коректен и правдоподобен динамичен процес на базовия актив, различен от лог-нормалния, дали опцията е от европейски тип или американски, наличие на допълнителни транзакционни разходи свързани с необходимостта от динамичното хеджиране на репликиращия портфейл, наличието на качествена и достоверна информация, ефективност на пазара изразяваща се в липса на арбитражни възможности, рационално поведение на пазарните участници и други.

Търсенето на баланс между сложността и многообразието от използвани, както статистически техники, така и абстрактни финансови концепции, и риска от това цялата методология да се превърне в „черна кутия“, която се зарежда и произвежда крайни, но неразбираеми резултати е важно условие, към което трябва да се подходи внимателно. Все още математическия инструментариум, е ограничен по отношение извеждането на едно уникално решение на диференциално уравнение движено от стохастичен процес, който е различен от традиционното Брауново движение. Въпреки това може да се докажа, че при някои класове фрактални модели, процеса на цената на актива е полумартингал (*semimartingale*), от което следва че е възможно стохастично интегриране на опционна функция на изплащане (*payoff function*) спрямо фракталния

процес, следователно същия е възможно да бъде имплементиран при ценообразуването и оценяване на опции. В допълнение, съществуват определени математически техники представени в труда на Nunno и Oksendal (2011), с които Фракталното Брауново Движение може да бъде интегрирано спрямо дадена функция, но сложността от гледна точка на интуитивната интерпретация и практическото приложение на подобни техники остава висока.

3.3. Втора глава – Моделиране и прогнозиране на волатилността на финансовите активи посредством използването на мултифракталния анализ

Втора глава на дисертационния труд съдържа широкообхватен емпиричен и иконометричен анализ насочен и целящ проверката на основната научна хипотеза, а именно приемане или отхвърляне на фракталните модели, като достатъчно добри измерители на динамиката и несигурността проявяваща се на финансовите пазари сравнени с едни от най-често цитираните и използвани водещи модели за описание и прогнозиране на ценовите траектории и техните възвръщаемости. Всички модели обект на изследването са заредени с данни на различни по характер и времева дължина финансови и реални борсово търгуеми активи.

За целите на анализа ще бъде изградена методическата рамка, спрямо която ще се дефинират изходните положения произтичащи от обективното условие и необходимост от компонентно разлагане и математическо описание на абстрактни концепции и свеждането им до количествено измерими порядки с цел прилагането на научния емпиричен метод. В началото е направена дефиниция на теоретичните съставни части обуславящи възвръщаемостта на даден актив, като на следващо място са изложени и необходимите допускания и ограничаващи условия, които ще останат извън рамките на дисертационния труд.

Представена е в детайли конкретната спецификация на фракталния модел, а именно *биномната непрекъсната версия на превключващ мултифрактален модел на Марков*. Освен математическото конструиране на модела е направен и преглед на литературните източници посветени в проблематиката на приложението на избраната спецификация на фракталния модел в областта на финансите. На следващо място са избрани сравнителните модели служещи за контролна група, спрямо които ще бъде

съпоставено представянето на фракталния модел. Контролната група модели се състои от седем различни спецификации на моделите от семейството на авторегресионната хетероскедастичност на условната вариация.

Конструкция на работния мултифрактален модел

Превключващият мултифрактален модел на Марков е комбинация от концепции, които са свързани, както с фракталния анализ, така и с класа от модели наричани *превключващи режима (regime switching)* първоначално конструирани и предложени от [Hamilton \(1989\)](#). Приложните емпирични изследвания на модела са насочени главно в областта на прогнозирането на волатилността на валутните пазари, виж: [Calvet и Fisher \(2004\)](#), [Calvet et al., \(2004\)](#) и [Lux \(2008\)](#); на капиталовите пазари, виж: [Calvet and Fisher \(2005, 2008\)](#), [Lux et al., \(2011\)](#) и [Chaung et al. \(2013\)](#) и проблематиката свързана с хеджирането на риска на фючърсните пазари [Alausa \(2014\)](#). Превключващият мултифрактален модел на Марков е разработен от [Calvet и Fisher \(2008\)](#) и е фрактален модел от семейството на стохастичната волатилност, при който условната волатилност е мултипликативна функция от: (1) краен брой $\bar{k}$ компоненти $M_{1,t}, M_{2,t}, \dots, M_{\bar{k},t}$ „превключването“ на всеки, от които е направлявано от йерархично хетерогенно намаляващи честоти (вероятности) $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\bar{k}}$; (2) мултипликативните компоненти са скалирани с позитивен параметър σ^2 измерващ средната (unconditional) вариация на възвръщаемостта. Пълната параметризация на непрекъснатия биномен $MSM(k)$ е характеризирана от вектор с четири параметъра $\psi \equiv (m_0, b, \gamma_{\bar{k}}, \sigma) \in \mathbb{R}_+^4$, където:

- $m_0 \in (1, 2]$: определя големината на всеки компонент на волатилността;
- $b \in (1, \infty)$ и $\gamma_k \in (0, 1)$ дефинират набора от превключващи/миграционни вероятности на всеки компонент на волатилността;
- $\sigma \in [0, \infty]$: е средното стандартното отклонение.

Контролна група модели

През 1982 г. [Engle \(1982\)](#) конструира модел за изследване на волатилността на активите, който е по известен, като процес на авторегресионна условна хетероскедастичност (ARCH). В последствие, множество автори и изследователи разработват различни варианти на гореспоменатия модел, които да улавят и да се

напасват към определени различия в статистическите характеристики на данните. Моделите разработени на база на идеята на Енгел, са част от по-голямо семейство подходи за моделиране на волатилността, а именно – моделите на стохастичната волатилност. Те успешно улавят и възпроизвеждат едни от ключовите статистически феномени на финансовите данни – клъстер ефекта на волатилността, автокорелационните ефекти, както и ливъридж ефекта.

За целите на изследването са избрани основните използвани контролни модели, а именно – **ARCH, GARCH, EGARCH, GJR-GARCH, TARCH, APARCH и FIGARCH.**

Диагностични критерии

В заключителната част на втора глава са представени избраните количествени критерии, на чиято база е оценена обяснителната способност на моделите от гледна точка на: Степента на сходимостта им към реалните данни и Оценката на прогностичната им сила.

Първата част е посветена на анализиране на моделите спрямо тренировъчната извадка – респективно представянето на водещите диагностични критерии за сравнителен анализ на представянето на различните модели и избор на такъв с най-висока обяснителна способност. По-конкретно е извършена серия от количествени статистически измерители и сравнителен анализ между мултифракталния модели и избраната контролна група модели – стойността на логаритмичната функция на правдоподобие, теста на Вуонг, информационен критерий на Акайке, информационен критерий на Шварц (Бейсов информационен критерий).

Втората част е насочена към анализ на представянето на моделите в рамките на прогностичната извадка и оценката на най-добрите резултати възпроизведени от моделите сравнени с фактически случилите се емпирични наблюдения на избрания показател на съответния актив. Качеството на прогностичното представяне спрямо избраната прогностична извадка се постига чрез приложението на регресията на Mincer-Zarnowitz и симулационно-визуален анализи.

3.4. Трета глава – Основни резултати и научно-приложни постижения на изследването

Трета глава от изследването е посветена на представянето на резултатите от дефинираната методологична рамка до този момент.

В началото на главата са представени и дефинирани използваните данни за целите на изследването. Необходимостта от предварителен и в голяма степен, задълбочен статистически анализ на избраните данни, е обусловена от добиването на, както основно статистическо разбиране, така и на визуална интерпретация на латентни и комплексни статистически показатели, структурни взаимовръзки, емпирични състояния и аномалии проявяващи се на избраните типове активи.

В заключителната част на главата са представени резултатите от предварително избраните диагностични тестове за оценка на параметрите на моделите и сходимостта им към данните от тренировъчната извадка на времевите редове. Направен е сравнителен анализ между резултатите от най-добрия мултифрактален модел и трите най-добри сравнителни модела избрани чрез дефинираните диагностични критерия. В заключение са извършени статистически тестове оценяващи прогностичната сила на мултифракталния модел за период до една година, както и симулации на данните генерирани от мултифракталния модел.

Използвани данни и предварителен статистически анализ

Обект на изследването ще бъде възвръщаемостта на цената на петрола сорт „Брент“ (Oil), цената на акциите на EXXON MOBILE (XOM), българския основен борсов индекс SOFIX, цената на BITCOIN деноминирана в долари, валутния курс на двойката Евро-Долар (EUR_USD) и стойността на борсовия индекс Standart and Poors 500 (S&P_500).

Ще използвам логаритмичната непрекъсната дневна възвръщаемост от стойностите на избраните активи, като същата е дефинирана по следния начин:

$$r_t = 100 \times [\ln(P_t) - (P_{t-1})]$$

За целите на оценяването на параметрите на моделите и конструирането на консистентни количествени критерии за определянето на прогностичната сила за всеки от динамичните редове ще бъдат определени две извадки. Едната ще служи за зареждане и оценяване на параметрите на модела или т.н. тренировъчна извадка (*in-sample*), а другата ще служи за сравнителен анализ между прогнозираните стойности и фактическите реализации (*out-of-sample*).

В долната таблица е представено обобщение на входящите данни за тренировъчната извадка, с които ще бъдат заредени моделите.

Таблица 3. Базови характеристики на входящите данни

Клас актив	Обект на измерване	Честота на измерване	Дължина на динамичния ред за тренировъчната извадка	Брой на наблюденията	Брой на наблюденията за целите на зареждането им в моделите ¹
Oil_Brent	Логаритмична възвръщаемост	дневна	23/08/2000 – 21/07/2022	5499	5474
EXXON MOBILE (XOM)	Логаритмична възвръщаемост	дневна	02/01/1962 – 21/07/2022	15241	14383
SOFIX	Логаритмична възвръщаемост	дневна	17/10/2000 – 21/07/2022	5393	5358
BITCOIN	Логаритмична възвръщаемост	дневна	17/09/2014 – 21/07/2022	2863	2861
EUR_USD	Логаритмична възвръщаемост	дневна	01/12/2003 – 21/07/2022	4833	2277
S&P_500	Логаритмична възвръщаемост	дневна	22/01/1990 – 21/07/2022	8185	7687

Източник: Yahoo Finance

Количествен фрактален анализ

Важна област в рамките на трета глава е изследването на възможността от приложението на фракталния анализ, като средство за количествено обогатяване на инструментариума на анализаторите посредством дефинирането на основните

¹ Броят на наблюденията използван за зареждането на моделите и оценяването на техните параметри е по-нисък в сравнение с броя на фактическите наблюдения, тъй като за целите на моделирането се изисква да бъдат изключени последователните наблюдения, при които липсва ценово движение и съответно техните относителни изменения са с нулеви стойности.

фрактални метрики. Същевременно е направен и сравнителен анализ между класическите количествени показатели използвани от финансовите анализатори и техните аналози произтичащи от фракталната наука и концепция. В допълнение, възприетите ограничителните допускания ще рамкират анализа до излагането на основните дескриптивни показатели на база наблюдаваните исторически данни. Целта е стигането до заключение дали фракталните метрики са в съответствие с основните статистически показател, които се ползват в анализите на динамични времеви редове на финансови данни.

За активите обект на анализ са изчислени следните три основни фрактални метрики:

- Параметърът алфа – същия е един от четирите основни параметъра характеризиращи степенните вероятностни разпределения и по-конкретно в настоящата част, коефициента е оценен на база стабилно разпределение на Леви (Леви-Стабилно разпределение);
- Фракталното измерение и
- Коефициентът на Хърст.

Фракталният анализ обогатява аналитичния инструментариум в най-голяма степен именно чрез добавянето на допълнителен измерител на риска, който е свързан с по-прецизното и правдоподобно измерване на вероятността в опашките на вероятностното разпределение. По друг начин казано, количествено измерване и взимане предвид на емпиричните наблюдаеми данни за значително по-висококачествено проявление на редки събития влияещи на цялата съвкупност, в сравнение с прогнозираните такива от класическите модели. Това е така наречения параметър алфа, който е именно измерителя дефиниращ вероятността в опашката на честотното разпределение на възвръщаемостите на определения актив.

Използвайки основните количествени измерители произтичащи от приложението на фракталния анализ – алфа коефициента, фракталното измерение и експонентата на Хърст за избраните активи може да се заключи, че SOFIX има най-висок коефициент на Хърст спрямо останалите класове активи, което показва, че индекса показва висока степен на устойчивост и наличие на обособен тренд. Най-ниски стойности на алфа коефициента (такива, които се доближават до единица) се наблюдават при SOFIX и BITCOIN, което показва завишената вероятност на

проявление на единични екстремуми при двата актива, които влияят по диспропорционален начин върху цялата съвкупност. От друга страна, акциите на EXXON MOBILE и валутната двойка евро-долар имат най-високи стойности, близки до две, каквито стойности се отчитат при нормалното вероятностно разпределение. Що се отнася до фракталното измерение, което може да се интерпретира, като измерител на начупеността на ценовата динамика, следователно аналог на риска проявяващ се от съответния актив, то най-високи стойности се наблюдават при акциите на EXXON MOBILE, валутната двойка евро-долар и индекса S&P 500.

Резултати от изследването за данните от тренировъчната (in-sample) извадка

Резултатите показват, че мултифракталния модел с десет честоти превъзхожда сравнителните модели от контролната група за данните на българския индекс SOFIX, възвръщаемостта от цената на петрола (OIL), възвръщаемостта от акциите на EXXON MOBILE и възвръщаемостта от цената BITCOIN. Мултифракталният модел с девет честоти е с най-добри показатели за данните на валутната двойка (EUR-USD). От всички анализирани активи единствено данните от възвръщаемостта на стойностите на S&P 500 се напасват най-добре към асиметричната версия на авторегресионния модел с условна хетероскедастичност на вариацията (TARCH), като критичната стойност от този модел показват, че при почти 50% ниво на същественост, модела не се различава съществено от асиметрично степенния ARCH. При данните за S&P 500 мултифракталния модел се оказва, че не се представя задоволително спрямо трите модела от контролната група от гледна точка на напасване към данните.

Резултати от изследването за данните от прогнозната (out-of-sample) извадка

В резултат от регресията на Mincer-Zarnowitz и симулационно-визуалните анализи, могат да се направят следните по-важни изводи:

- За част от активите (SOFIX и цената на Нефта сорт „Брент“) мултифракталния модел генерира краткосрочни прогнози между 20 и 60 дни, които са на практика идентични с реално наблюдаваните.
- Визуално симулираните дневни възвръщаемости на активите спрямо подходящо оценените параметри на мултифракталния модел успяват да възпроизведат

основните статистически показатели и феномени типично проявяващи се в реалността. Графиките наподобяват реалните данни, като по-детайлен преглед е направен за индекса SOFIX. Нещо повече, симулираните данни от мултифракталния модел чувствително се различават от тези генерирани от класическия вероятностен процес използван във повечето рискови метрики и теоретични допускания, стоящи в основните финансови теории, което е директно доказателство за потенциала на фракталните модели за целите на развитието и оптимизирането на финансовата теория, така щото същата да отразява действителните процеси по един по-представителен и продуктивен способ.

Изводите, произтичащи от анализа представен в трета глава потвърждават напълно превъзходството на избрания мултифрактален модел пред избраните най-добри и често цитирани в научната литература иконометрични модели. Това на практика е предпоставка на потенциала, който имат фракталните модели и тяхното приложение в анализирането на динамиката на финансовите пазари. Нещо повече, фракталните метрики представени в главата показват, че същите могат да служат, като допълващ инструментариум за дескриптивен анализ и предоставянето на по-правдоподобна и пълна картина, която да характеризира състоянието на финансовите активи.

4. Заключение

Невъзможността на класическата финансова теория и модели да опишат в желаната дълбочина и прецизност феномените от заобикалящата ни действителност е в основата на изследването на възможностите за приложимост на фракталната геометрия във финансите и риска. Фракталният анализ предоставя алтернативна гледна точка и допълващ аналитичен апарат претендиращ за по-правдоподобното свързване на емпиричните феномени с количествен измерител обобщаващ в максимална степен тяхното поведение и динамика. Този аналитичен апарат има потенциал за развитие не само в областта на анализа на поведението на финансовите пазари, както ретроспективно, така и прогностично, но и в подобластите свързани с оценката на деривати, управление и измерване на риска и други.

Резултатите от изследването в дисертационния труд постигат своите цели изразяващи се в даването на отговор на предварително дефинираните работни хипотези, както следва:

Хипотеза 1: Изборът на определен вероятностен процес, който е в състояние да възпроизведе голяма част от статистическите показатели проявяващи се на финансовите пазари е подход, който предопределя оптимизирането на процеса на анализ на дадена икономическа променлива поради това, че не са непременно необходими предварителни проучвания и запознаване с изследваното явление. Фракталният анализ и неговото приложение в икономиката и в частност финансите, има потенциал да се превърне в мощен инструмент за описание и прогнозиране на ценовата динамика на активите. Представянето на избрания фрактален модел в настоящето изследване посредством възпроизвеждането на симулирани изкуствено създадени ценови траектории, които визуално не могат да се различат с реално наблюдаваните данни, доказва горното твърдение. В този смисъл хипотезата се потвърждава.

Хипотеза 2: Предимствата на разглеждания фрактален модел, спрямо едни от най-добрите и често използвани иконометрични модели, са значително по-високи от статистическа гледна точка. Използваните диагностични критерии за оценка на стабилността на модела потвърждават, че данните се обясняват по по-добър начин от мултифракталния модел сравнени с избраната контролна група модели. Изследването представено в дисертационния труд потвърждава хипотезата.

Хипотеза 3: Изчисляването на основните фрактални измерители по отношение на изследваните активи показват резултати, които са белег на:

- Вероятността за големи движения в стойността на активите са много по-високи от тези предсказвана ако се използват стандартните финансово-статистически инструменти за анализ;
- Рискът измерен чрез фракталното измерение е съпоставим с този изчислен посредством волатилността (стандартното отклонение) и
- Експонентата на Хърст показва завишена степен на конструирането на проспективен модел с висока прогностична сила, поради занижената стохастика в данните и обособен тренд.

Хипотезата се потвърждава и може да се каже, че метриките произтичащи от фракталния анализ дават допълваща перспектива към анализирането на рисковата структура на финансовите активи.

Хипотеза 4: Изхождайки от резултатите потвърждаващи преимуществата на фракталните модели при анализирането на динамиката на финансовите активи, включително успешното възпроизвеждане на симулирани данни, които не се различават от реално наблюдаваните, е разумно да се допусне, че интегрирането на фракталния анализ в процесите на оценяване на акциите на компаниите и ценообразуване на опции, би довело до подобряване и оптимизиране на крайната стойност. Стига се до извода, че приложението на фракталния подход в тези две области на оценяването (на акциите на компании и опции) на теория би способствало да се оптимизира процеса на оценката, но същевременно възникващите допълнителни усложнения, остават задачи за бъдещи изследвания.

Следователно, работната хипотеза не може да бъде потвърдена напълно, поради липсата на категорични емпирични резултати сравняващи процесите на оценка при използването на фракталния анализ и класическите подходи и методи на оценяване.

5. Приноси на дисертационния труд

В резултат на проведените в рамките на дисертационния труд изследвания, научните приноси на дисертацията може да бъдат обобщени, както следва:

- При допусканията свързани с анализирането на финансовите пазари и икономически явления в среда на несигурност по отношение на качеството и достоверността на разполагаемите данни, включително невъзможността да се получи структурно разбиране за функционалната зависимост на взаимовръзките между икономическите агенти, авторът стига до извода, че обхвата на фундаменталния анализ е лимитиран по определение и следователно се възприема тезата, че реконструирането на статистическите характеристики на генериращия цената процес посредством използването на вероятностни процеси представлява по-правдоподобен и качествен подход за анализ.
- Доказва се, че фракталните стохастични процеси обясняват в много по-висока степен статистическите емпирични характеристики на почти всички финансови

активи, обект на анализ в изследването, сравнени с водеща контролна група от иконометрични модели.

- Доказва се, че избраният мултифрактален модел прави прогнози на структурата на вариацията на част от изследваните активи в краткосрочен план (от 5 до 40 дни), които не се различават статистически от фактически реализираните стойности.
- Заклучава се, че основните фрактални метрики произхождащи от фракталния анализ могат да служат за допълващ инструментариум към традиционните количествени финансови измерители, с помощта на които да се правят по-информирани и правдиви изводи за рисковата структура и динамика на финансовите променливи.
- Представя се възможността от приложението на фракталния анализ в области на финансовата наука, които биха довели до подобрене и оптимизиране на процесите свързани с оценяването на активи, управлението на риска, алокацията и конструкцията на оптимални инвестиционни портфейли, банковото дело и други области. В частност, са представени възможности за имплементация на фракталния анализ в областта на оценяването на акциите на компании чрез използването на модела на дисконтирани парични потоци и ценообразуването на финансови опции.

6. Списък на публикациите на докторанта

- Рангелов, П. 2024. “Марковски превключващ мултифрактален модел: Симулиране на рисковия профил на българския финансов пазар”. Сборник с доклади от осемнадесета международна научна конференция на младите учени на тема "Икономиката на България и Европейския съюз: инфлация, фискална консолидация и устойчиво развитие", стр. 248-261
- Ненков, Д., Христов, Я., Рангелов, П. 2023. Актуални проблеми на определяне стойността на акциите на капиталовите пазари. На примера на развитите капиталови пазари и развиващия се капиталов пазар в България. *ИК на УНСС, София*.

- Рангелов, П. 2023. Анализ на българския финансов пазар, посредством приложението на фракталната геометрия. „Икономически и социални алтернативи“ (2023, бр. 2).
- Рангелов, П. 2022. Оценяване на реални опции при различна динамика на базовия актив. „Икономически и социални алтернативи“ (2022, бр. 3).
- Рангелов, П. 2022. Приложение на симулационните методи за оценка на предприятия, опериращи в среда на несигурност. „Икономически и социални алтернативи“ (2022, бр. 1).

7. Библиография – източници, цитирани в Автореферат към дисертационния труд

- (1) Хюм, Д. 2016. Изследване на Човешкия Разсъдък. *Издателство Изток-Запад*.
- (2) Alausa, W. B. 2014. Dynamic Futures Hedging with a Vector Error Corraction Markov Switching Multifractal Model. Available at SSRN: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2523019
- (3) Bacry, E., Delour, J., Muzy, J. F. 2001. Modelling financial time series using multifractal random walks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 299, issue 1, 84-92.
- (4) Carroll, S. 2019. Where Quantum Probability Comes From, Quantamagazine (<https://www.quantamagazine.org/where-quantum-probability-comes-from-20190909/>)
- (5) Campbell, J. Y., Lo, A.W., MacKinlay, A.C. 1997. The Econometrics of Financial Markets, Princeton University Press.
- (6) Calvet, L., Fisher, A. 2002. Multifractality In Asset Returns: Theory and Evidence. *The Review of Economics and Statistics*, Vol. LXXXIV, No. 3, 381-406
- (7) Calvet, L. E., Fisher, A. J. 2004. How to Forecast Long-Run Volatility: Regime Switching and the Estimation of Multifractal Processes. [*Journal of Financial Econometrics* 2\(1\): 49-83.](#)

- (8) Calvet, L. E., Fisher, A. J., Thompson, S. B. 2004. Volatility Comovement: A Multifrequency Approach. *NBER Working Paper No. t0300*, Available at: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=583421.
- (9) Calvet, L. E., Fisher, A. J. 2005. Multifrequency News and Stock Returns. *NBER Working Paper No. w11441*, Available at: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=752019.
- (10) Calvet, L., Fisher, A. 2008. *Multifractal Volatility: Theory, Forecasting and Pricing*, Elsevier Inc.
- (11) Chuang, W.-I, Huang, T.-C, Lin, B.-H. 2013. Predicting Volatility Using the Markov-Switching Multifractal Model: Evidence from S&P 100 Index and Equity Options. *North American Journal of Economics and Finance* 25 (2013), 168-187.
- (12) Engle, R. F. 1982. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, Volume 50, Issue 4 (Jul.,1982), 987-1008.
- (13) Fama, E. F. 1970. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *The Journal of Finance*, Vol. 25, No. 2; Blackwell Publishing for the American Finance Association.
- (14) Hamilton, J. D. 1989. A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. *Econometrica*, Vol. 57, No. 2 (March,1989), 357-384.
- (15) Hume, D. 1738. *A Treatise of Human Nature*. *The Clarendon Edition of the Works of David Hume*, Oxford University Press.
- (16) Laplace, Pierre-Simon. 1902. *A Philosophical Essay on Probabilities*. New York: J. Wiley; London: Chapman & Hall.
- (17) Lo, A. 2019. *Adaptive Markets: Financial Evolution at the Speed of Thought*, Princeton University Press.
- (18) Lux, T. 2008. The Markov-switching multifractal model of asset returns: GMM estimation and linear forecasting of volatility. *Journal of Business and Economic Statistics* 26, 194–210.

- (19) Lux, T., Morales-Arias, L., Sattarhoff, C. 2011. A Markov-Switching Multifractal Approach to Forecasting Realized Volatility. Kiel Working Paper 1737, Kiel Institute for the World Economy, Hindenburgufer 66, 24105.
- (20) Mandelbrot, B. B. 1963. The Variation of Certain Speculative Prices. *The Journal of Business*, Vol. 36, No. 4 (Oct., 1963), pp. 394-419.
- (21) Mandelbrot, B. B. 1967. The Variation of Some Other Speculative Prices, *Journal of Business* 40, 393-413.
- (22) Mandelbrot, B. B., Van Ness, J. 1968. Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications. *SIAM Review* Vol. 10, No. 4, October 1968, 422-437.
- (23) Mandelbrot, B. B. 1972. Statistical Methodology for Nonperiodic Cycles: From the Covariance to R/S Analysis. *Annals of Economic and Social Measurement*, 1, 259-290.
- (24) Mandelbrot, B., Fisher, A., Calvet, L. 1997. The Multifractal Model of Asset Returns. *Cowles Foundation discussion paper no. 1164, Yale University*.
- (25) Mandelbrot, B.B., Hudson, R.L. 2008. The (mis)Behavior of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward. *Basic Books*.
- (26) Nunno, G., Oksendal, B. Editors. 2011. Advanced Mathematical Methods for Finance. *Springer*.
- (27) Peters, E. E. 1994. Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics. *John Wiley & Sons, Inc.*
- (28) Popper, K. R. 1950. Indeterminism in Quantum Physics and in Classical Physics. *The British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. 1, No. 2 (Aug., 1950), pp. 117-133.
- (29) Taleb, N.N. 2018. Skin in the Game: Hidden Asymmetries in Daily Life. *Random House*.
- (30) Walde, K. 2012. Applied Intertemporal Optimization. *Know Thyself – Academic Publishers*.

SUMMARY

of dissertation for educational and scientific title Doctor of
Philosophy on the following topic:

**Possibilities of using fractal stochastic processes to
optimize the valuation of financial assets**

PhD student:
Petar Rangelov

Scientific Advisor:
Prof. Dr. Dimitar Nenkov

Abstract

This dissertation project on the topic „Possibilities of using fractal stochastic processes to optimize the valuation of financial assets“ consists of an introduction, an exposition in three chapters, conclusion and a bibliography. The volume of the dissertation is 223 pages, of which the main text is 197 pages. 202 sources were used, of which 11 are in Bulgarian and 191 in English, 44 sources are books, two sources are databases, and the rest are articles published in scientific journals or online editions. A list of abbreviations used, a list of figures (3), a list of graphs (12) and a list of tables (60) are attached.

The author of the dissertation is a PhD student at the Finance Department of the University of National and World Economy.

1. Overall summary of the dissertation

1.1. Relevance of the research topic

One of the main circumstances that a certain economic agent faces in relation to their investment decisions is the determination of their risk profile. All quantitative measures of risk in finance aim to unify and encapsulate a set of behavioral patterns that are different in nature, structure and origin, which are the actions of economic subjects. Therefore, the mathematical and statistical description of financial markets is an epidermal manifestation of much more complex interrelationships of human behavior in relation to making investment decisions.

The conventional wisdom in finance regarding measuring the risk of a particular variable or object of investor interest is deep-rooted economic thought and the notion that the historical volatility of a given variable is a good measure of uncertainty and risk. Practice and empirical research show serious flaws in this thesis. For more than a century, economists have been trying to analyze risk, explain and measure it, and ultimately exploit it for profit. The approach adopted in this dissertation is to consider and perceive market values as unpredictable and uncontrollable – therefore the best way to predict them is by determining a given probability of the realization of a given value. The use of the probabilistic approach does not necessarily mean that chance completely guides socio-economic phenomena, but the author of the study adopts the thesis that it is the best tool for analyzing and forecasting the behavior of financial-economic phenomena.

Moreover, complex dynamic systems such as developed financial markets are affected by multiple factors. Therefore, when a phenomenon is generated and is the consequence of an innumerable set of causes, the application of fundamental analysis can only explain general trends and basic regularities, which in some cases may even be useless because under certain circumstances local turbulence can create a series of self-reinforcing cascade of unpredictable events leading to non-linear manifestations and asymmetric effects of the economic phenomenon studied by the observer.

According to the author, the relevance of the dissertation resulting from the study of the influence of the probabilistic approach on the explanation of financial and economic processes is due to the following more important factors:

- The world we live in is unpredictable, even more so – unpredictability is woven into our everyday life. The lack of complete knowledge regarding the processes and interdependencies that drive socio-economic systems in many cases limits us to derive and make an absolute prediction (and even in many cases a good enough approximation) of a given phenomenon we are studying. Since it is objectively impossible to extract all the necessary information about a given system and therefore make a conclusion and prediction about its behavior, the assumption that complex systems behave as unpredictable and their dynamics can be described in terms of some random process is the most the good we can do in order to build forecast and decision-making framework.
- The probabilistic approach treats the interrelationship of multiple factors influencing a given outcome variable as a process partially generated by chance. Randomness is a difficult concept to grasp that clashes with observable facts and intuitive understandings. In the socio-economic sphere, and in particular, in finance, it collides with the concept of causality, economic rationality, even with free will. It is easy to see that a random process can create its own structured regularities, but it is difficult to prove that such regularities can represent a stable projection of human behavior in relation to a given economic stimulus or phenomenon.
- Classes of probabilistic processes arising from fractal geometry are one of the most promising and flexible tools for analysis and modeling financial markets, which increase their potential with an increasing development trend in recent decades. Their suitability and potential in some areas of finance, such as asset valuation and derivatives, as well as risk management and the theory and practice of investment portfolio management, have not yet been sufficiently explored in the scientific literature and practice.

The present dissertation proceeds from the aforementioned conceptual narratives, as a result of which the thesis is adopted that the concept of a model will not refer to its usual meaning of the mathematical representation of economic interdependencies. Instead, it will be understood as a statistical algorithm designed to accomplish coverage of a large number of empirical observable facts by logically deducing them from the smallest possible number of hypotheses and axioms. The fundamental mechanism of the models themselves is conditioned by the generation of a large number of artificial parallel lines of causation with which to reproduce long chains of possible consequences. Thus, the ideal model for

explaining price changes is one that “produces artificially simulated ones that are difficult to distinguish from the actual observed ones” ([Mandelbrot, 1997](#)).

The main area in the scope of the study is related to the presentation of the fundamental principles of fractal geometry and their application in finance in two main directions.

- **Description of the dynamics related to the change in the price level over time.**
- **Application of fractal analysis in the field of evaluation of investment projects and companies, as well as the pricing of financial options.**

Applying an alternative approach to the valuation of various assets can lead to significantly more relevant valuations and making informed investment decisions. In all developing financial markets, the variety of financial and real assets inevitably grows, and with it the explanation of their behavior acquires new dimensions. The present study aims to put emphasis on the approaches and some of the models for describing and forecasting the behavior of prices and their returns of the various assets in a wider framework, namely in the field of valuation.

1.2. Object and subject of research

The object of the dissertation is fractal analysis and its applications in the areas of modeling the price dynamics of assets, with a view to possible use in the pricing of financial options, the evaluation of investment projects and entire enterprises.

The subject of the dissertation is fractal models used in finance.

The main topic area of the dissertation is fractal analysis and its application in the field of modeling the price change of assets over time and its subsequent application in the field of option and company valuation. In this regard, the scope of the research is interdisciplinary, including both areas of corporate finance, including pricing of derivatives, capital markets, approaches to valuation of companies and their shares, as well as specific directions in the field of statistics and financial econometrics, including econometric modeling of time series, methods for estimating parameters of econometric models, residual component diagnostics, simulation methods and forecasting.

1.3. Research thesis and hypotheses

The research thesis of the study is not the product of the definition of a single statement subject to theoretical and empirical proof or analysis with the aim of synthesizing certain qualitative and quantitative indicators that possess, rather is a set of cascading phenomena, each of which is subject to a separate examination by means of methods with different degrees of evidential strength, depending on the relative importance of the phenomenon and its place in the logical sequence of the study. In essence and in a generalized form, the research thesis states that through the use of the fractal analysis toolkit financial and economic processes can be studied in greater integrity and efficiency, and in particular in the present study this type of analysis is applied in analyzing the price behavior of different types of financial assets, as well as in the area of their valuation.

In this regard, the following working hypotheses are defined and should be verified:

Hypothesis 1: Analyzing asset price movements through the reconstruction of the statistical characteristics of the generating price process, through fractal analysis, represents a more reasonable and plausible method of analysis and decision-making.

Hypothesis 2: The selected working fractal model explains the dynamics in asset returns to a greater extent than selected leading econometric benchmarks from a predefined sample group.

Hypothesis 3: Quantitative metrics resulting from fractal analysis present the risk structure of financial assets more broadly and in greater completeness, as they complement classical quantitative indicators.

Hypothesis 4: Fractal analysis is able to improve and optimize the process of evaluating investment projects, entire companies and some classes of derivatives, in particular financial options.

1.4. Goal and objectives

The main goal of the dissertation is to investigate the possibilities of using the fractal geometry toolkit in the field of analyzing the price dynamics of financial assets by deriving more plausible and intuitive risk metrics, as well as its application in the field of financial asset valuation.

More specifically, to prove and achieve the main goal, it could be broken down into the following research tasks:

1. Study of the empirical characteristics of financial assets.
2. Extended study of the developed financial models and available tools addressing the problems related to the description and explanation of the observed statistical characteristics and anomalies appearing on the dynamics of the price of financial and commodity assets.
3. Study of the specialized scientific literature related to the developed fractal models used in finance and selection of a working fractal model for the purposes of the study.
4. Definition of the main fractal process presented in the research - accessibility to databases, economic logic, econometric construction of the model, methods for finding the parameters of the model, statistical verification for adequacy, calibration, criterion for prognostic efficiency.
5. Literature review and selection of appropriate sample group econometric models.
6. Comparative analysis of the results of the quantitative criteria for data fitness and predictive power between the used fractal model and the models of the control group.
7. Brief literature review of approaches and models for valuation of companies and their shares.
8. Economic justification of the used assumptions and conceptual verification of the logical sequence of the working multifractal process.

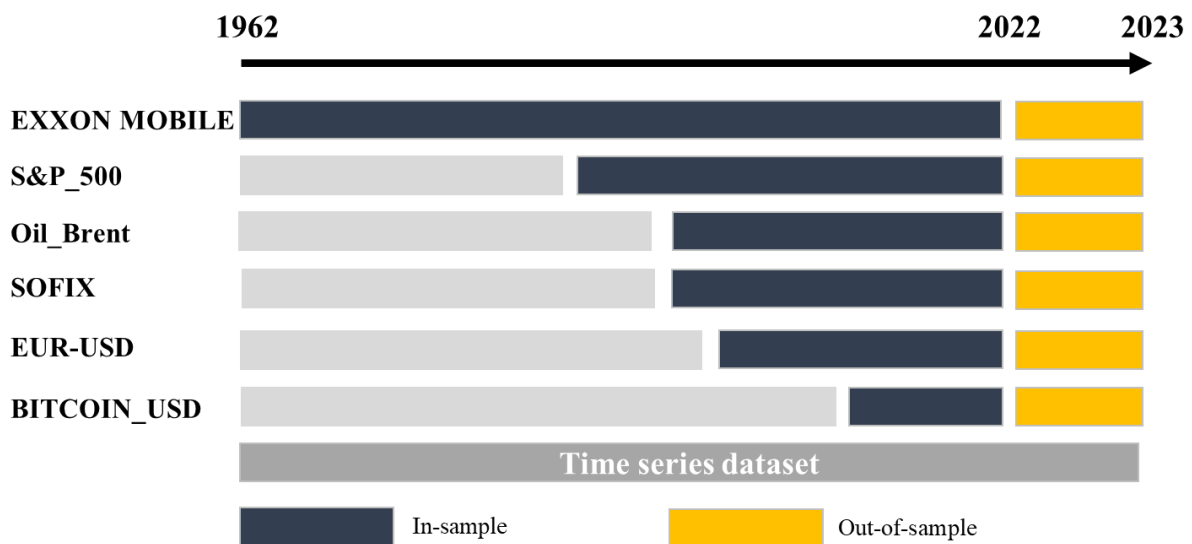
1.5. Scope and sources

The scope of the study can be divided into temporal and spatial. **Spatial coverage** is unlimited, but data from the USA and Europe will be primarily used. More specifically, for the purposes of the empirical part, data on six assets were used – the price of Brent crude oil, the price of EXXON MOBILE shares, the Bulgarian main stock market index SOFIX, the price of BITCOIN denominated in dollars, the exchange rate of the Euro-Dollar and the value of the Standard and Poors 500 stock index.

The time frame in terms of collecting and loading the data into the models is practically limited only by the possibility of easily and without loss of time and costs, finding

publicly available databases. In particular, time series of different lengths ranging from 1962 to mid-2023 were used. Two samples will be determined for each of the time series. One, in-sample time series will serve to load and evaluate the parameters of the model, and the other, out-of-sample time series will serve for a comparative analysis between the predicted values and actual realizations. A summary of the assets studied, the sampling distribution and the length of the time series is as follows:

Figure 2. *Summary of data used, length of time series and sampling distribution.*



The databases used for the purposes of the statistical and econometric analysis were obtained from public sources and more specifically from:

- Yahoo Finance – database of current and historical information on public companies, indices and other financial assets.
- Federal Reserve Economic Data (FRED) – a database system maintained and administered by the Bank of St. Louis, part of the Federal Reserve System of Banks.
- Investor.BG – an online source supporting a database of the value of Bulgarian stock market indices.

1.6. Methodology

The methodology used in the research is individually determined depending on the hypotheses to be analyzed, proven or rejected.

The methodology used is related to the defined first hypothesis of the current dissertation, investigating the advantages of using probabilistic processes (in particular, fractal ones) from the point of view of analyzing the price movements of assets by means of the reconstruction of the statistical characteristics of the generating price process, compared to classical fundamental analysis, is as follows:

- **Study of the specialized literary sources**, mainly connected in two directions: the field of fractal analysis and fractal and multifractal models used in finance.
- **Hypothetical method**, in terms of setting certain assumptions and frameworks, mainly theoretical, having a role in building the logical and conceptual basis on which the entire dissertation will be built.
- **Historical and logical methods**, in connection with the historical review of the theoretical foundations laid over time by the most significant names in science related not only to socio-economic theory, science and practice, but also to researchers in the natural and natural sciences, whose ideas are widely used in one direction or another in the current development. The logic of interrelationships will be based on the strict application of the scientific approach.
- **Theoretical-methodological analysis**, used in order to establish solid theoretical foundations, based on logical causality, on the basis of which to subsequently build and justify realistic assumptions and empirical testing of the studied phenomena in relation to the previously set goals.

The methodology used related to the experimental study regarding the second and third hypotheses investigating (1) the dynamics of price fluctuations modeled by means of the multifractal model compared with a selected sample group of leading econometric models and (2) the quantitative metrics for risk analysis of the financial markets resulting from the fractal analysis, is as follows:

- **Statistical analysis** related to the predefined statistical databases of the selected assets. A series of statistical analyzes were applied to the selected time series, namely: tests for normality of the distribution of returns, including Jarque-Bera and Cramer von Mises tests, serial autocorrelation and long-term persistence tests including the

Ljung-Box test, the Box-Pierce test and analysis of rescaling (and the associated Hurst exponent), heteroscedasticity tests of the stochastic component including the Engle test for the presence of ARCH effects, as well as tests for stationarity and the presence of a unit root including the Augmented Dickey-Fuller test and the KPSS test.

- **Econometric modeling and diagnostics**, in relation to:
 - The construction of the main multifractal stochastic model subject to analysis - the continuous binomial version of a Markov-switching multifractal model.
 - Selection and presentation of the sample group comparative econometric models from the family of Autoregressive conditional heteroskedasticity.
 - Selection of an appropriate technique for estimating model parameters against in-sample data. The parameters of the multifractal model, as well as of the control group of models, were estimated using the maximum likelihood method.
 - The author of the dissertation constructed the multifractal model, the econometric models of the sample group, as well as the evaluation of their parameters by means of the [Python](#) programming language.
- **Comparative analysis**, used mainly in terms of reviewing competing stochastic models that provide a probability law versus defining different assumptions, as well as comparing and selecting the most appropriate technique to solve the given problem including:
 - The definition of Vuong's test aiming to determine by means of statistical hypothesis testing the best multifractal model among many competing ones.
 - The presentation of the selected diagnostic criteria against which a choice was made between the models with the highest explanatory power in terms of fit to the observed data, including the construction of a likelihood function and two of the most commonly used information criteria – Akaike's information criterion and Schwartz information criterion.
 - Selection of appropriate loss functions (loss function), as well as performing a Mincer-Zarnowitz regression analysis aimed at comparing the forecasting power of the models. The results of the above analyzes were performed using the [Python](#) programming language.

- Simulation-visual construction of artificially generated financial data and comparative analysis against the actual observed data. The simulations were carried out using the [Python](#) programming language.
- Derivation of the main quantitative measures resulting from the fractal analysis, including alpha coefficient, Hurst exponent and fractal dimension. Accordingly, the listed metrics were generated using the [MATLAB 2016a](#) software product

The used methodology related to the fourth hypothesis of the research related to the use of fractal analysis in the field of optimization of the process of evaluation of investment projects, entire companies and financial options.

- **A literature review** dedicated to the study of the available tools for evaluating companies and their shares, as well as the development of the economic and mathematical process related to the issue of pricing financial options.
- **Inductive and deductive analysis**, inseparably used as a means of theoretically proving the logical consistency of a certain statement in order to derive a conclusion (outcome).
- **Critical analysis**, mainly regarding the theoretical and practical statements and assumptions in the field of option valuation.

1.7. Structure of the dissertation

The dissertation is divided into an **introductory part, three chapters and a conclusion**, and the detailed structure is as follows:

- **Chapter I** begins with a historical and literary review of the basic statistical characteristics observed in the various markets and financial instruments. The main significant and constant occurring phenomena are derived and defined, as a prelude to an introduction to fractal and multifractal analysis. The next component of the first chapter presents the principles for explaining economic phenomena based on quantitative analysis represented by the general theory of complex dynamic systems, as well as by deterministic and probabilistic models for financial analysis. In this regard, a retrospective review of the leading approaches for probabilistic modeling of

the price processes of financial and real assets has been made. This is followed by an introduction to fractal geometry, as well as a historical and literature review of fractal models used in finance. Chapter one concludes with a brief literature review and suitability of approaches and models for the valuation of companies and financial options in view of the possible application of fractal models in these two important areas of financial science and practice.

- **Chapter II** is aimed at the empirical verification of the main hypothesis of the dissertation work through the creation of a methodology for comparative analysis between leading econometric models and the basic fractal model. The chosen fractal model object of study is a specification of the continuous binomial version of a Markov-switching multifractal model. The construction of a model, its advantages and disadvantages, as well as the approaches for estimating its parameters are presented in detail. In addition, in order to assess its explanatory power, a simulation methodology was constructed to generate artificially created data, in order to verify the stability of the model parameters depending on the size of the data samples with which it was loaded. The control group of models consists of seven econometric models from the family of autoregression models with conditional heteroscedasticity of variation (ARCH-class). Next, quantitative criteria and statistical tests were selected for comparative analysis and selection of the best model in terms of its explanatory power, degree of convergence to real data and predictive power.
- **Chapter III** is devoted to a methodical exposition of the data used for the purposes of the study, visual-statistical analysis, presenting the main results of the study. For modeling purposes, six asset classes with different time series lengths are selected for comprehensiveness. The data of the selected assets are subject to a thorough and detailed preliminary statistical-diagnostic analysis, including the main applicable fractal metrics. The total time series of the various assets are divided into two samples – the first, a training sample, used to load the models and evaluate their parameters and explanatory power, and the second, a prediction sample, used to quantitatively measure the predictive power of the competing models. The third chapter concludes with a summary of the research results for the data from the training and prediction samples. For the training sample, the estimation of the parameters of the fractal model and the models from the control group are presented, based on the diagnostic criteria, the best specification of the multifractal model is selected and a comparative analysis

is made between the control group of models and the fractal one. For the estimated sample, the results and their adequacy from the predicted values generated by the multifractal model are presented. In conclusion, a comparative analysis was made between the simulated data from the multifractal model and the actually observed empirical values of the financial assets.

- Conclusion – the results obtained are summarized in the conclusion of the dissertation.
- At the end of the dissertation, the list of the sources used are presented.

2. Table of contents

The dissertation has the following content.

LIST OF ABBREVIATIONS

LIST OF FIGURES

LIST OF SCHEDULES

LIST OF TABLES

INTRODUCTION

1. Relevance of the research topic
2. Object and subject of research
3. Research thesis and hypotheses
4. Goal and objectives
5. Scope and sources
6. Methodology
7. Structure of the dissertation
8. Unaffected areas and tasks for future research
9. Definitions

CHAPTER I. INTRODUCTION TO FRACTAL ANALYSIS

1. Empirical characteristics of financial data

- 1.1. Presence of fat tails in the probability distribution of returns
- 1.2. Concentration of volatility in clusters
- 1.3. Autocorrelation and long persistence
- 1.4. Leverage and non-stationarity
- 2. Anatomy of dynamical systems
- 3. Deterministic and probabilistic models in finance
 - 3.1. Geometric Brownian motion
 - 3.2. Mean-reverting processes
 - 3.3. Stochastic volatility models
 - 3.4. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity models (ARCH)
 - 3.5. Jump-diffusion processes
 - 3.6. Regime-switching models
- 4. Fractal models in finance
 - 4.1. Levy processes
 - 4.2. Fractional Brownian motion
 - 4.3. A multifractal model of asset returns
 - 4.4. One-dimensional Markov-switching multifractal model
 - 4.5. Two-dimensional and n-dimensional Markov-switching multifractal model
 - 4.6. Vector error correction Markov-switching multifractal model
- 5. Integrating fractal analysis into the optimization of financial asset valuation
 - 5.1. Overview of approaches and models for valuing companies and their stocks
 - 5.2. Application of fractal processes in the process of valuation of enterprises through the models of the family of Discounted cash flows
 - 5.2.1. Operating value of the company's assets
 - 5.2.2. Building structure of free cash flows
 - 5.2.3. Application of fractal models in the evaluation process
 - 5.3. Value of an option assuming a multifractal process driving the dynamics of the underlying asset

CHAPTER II. MODELING AND FORECASTING VOLATILITY OF FINANCIAL ASSETS USING MULTIFRACTAL ANALYSIS

- 1. Concept of modeling returns and volatility

2. Binomial Markov-switching multifractal model
 - 2.1. Model construction
 - 2.2. Distribution of the multiplicative component
 - 2.3. Methods for estimating model parameters
 - 2.3.1. Maximum likelihood estimator
 - 2.3.2. Simulating maximum likelihood estimator
 - 2.3.3. Generalized method of moments
 - 2.4. Small-sample properties
3. Sample-group models
 - 3.1. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH)
 - 3.2. Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (EGARCH)
 - 3.3. Glosten-Jagannathan-Runkle Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GJR-GARCH)
 - 3.4. Threshold Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (TARCH)
 - 3.5. Asymmetric Power Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (APARCH)
 - 3.6. Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (FIGARCH)
 - 3.7. Estimation of model parameters
4. Diagnostic criteria
 - 4.1. Fitting the in-sample data to the models
 - 4.1.1. Likelihood function and information criteria
 - 4.1.2. Vuong's test for choosing an exact specification of the multifractal model
 - 4.2. Quantification of forecast error for out-of-sample data
 - 4.2.1. Loss functions
 - 4.2.2. Mincer-Zarnowitz regression

CHAPTER III. MAIN RESULTS AND SCIENTIFIC ACHIEVEMENTS

1. Data used and preliminary statistical analysis
 - 1.1. Normality of the probability distribution: Jarque-Bera and Cramer von Mises tests
 - 1.2. Autocorrelation: Ljung-Box, Box-Pierce tests and Hurst coefficient estimation

- 1.3. Heteroscedasticity: Engle's test for ARCH effects
- 1.4. Stationarity and presence of unit root: Augmented Dickey-Fuller test and KPSS criterion
- 1.5. Quantitative fractal analysis
- 2. Research results for the in-sample data
 - 2.1. Parameter estimation for the control group models
 - 2.2. Parameter estimation of the Markov-switching multifractal model
 - 2.3. Choosing the best multifractal model
 - 2.4. Comparative analysis between the sample-group models and the multifractal model
- 3. Research results for out-of-sample data
 - 3.1. Evaluating the predictive power of the fractal model – Mincer-Zarnowiz regression
 - 3.2. Simulation of returns from multifractal models

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHY

3. Synthesized exposition of the dissertation

3.1. Introduction

The introduction of the dissertation acquaints the reader with the main concepts underlying the research: relevance of the research, its object and subject, the research thesis and working hypotheses, the goal and the tasks that the author seeks to achieve, the scope of the research and the data used, as well as the structure of the dissertation.

3.2. Chapter one – Introduction to fractal analysis

The first chapter of the dissertation presents an introductory theoretical justification and review of the literature related to the emergence of fractal geometry and its historical evolution related to the application in finance. The need to introduce fractal analysis as an analytical tool in finance stems from the inability of traditional financial and econometric

models to describe with the necessary degree of precision the main empirically observed statistical phenomena occurring in financial markets. For this reason, the first chapter begins precisely with a literature review of the most common statistical characteristics determining the variation of financial and commodity assets.

The clash between descriptive and forecasting analysis approaches is an inevitable consequence of the pre-assumptions that researchers must make in the course of analysis. The availability of sufficient and quality information is also an element of the process for choosing which approach to adopt. Considering the above reasons, two major approaches to analysis can be distinguished in general terms. One based on the construction of formal interrelationships and causal chains, which are most often done retrospectively. Such an approach is known as fundamental or deterministic. The second approach is related to the introduction into the analysis process of a certain degree of uncertainty and probability, which has a different type of structure adapted to the historical dynamics of the studied phenomenon. This is the so-called probabilistic or stochastic approach.

Bearing in mind that fractal analysis and fractal models fall within the scope of the second approach – the probabilistic one, the author of the dissertation maintains the thesis that this approach is the most appropriate when analyzing the price dynamics of financial markets and all resulting applications in modern finance – the management of investment portfolios by investors, asset valuation, risk management, numerous applications in banking, etc.

For these reasons, the main probabilistic processes developed in finance are presented, as well as an overview of the main properties of dynamical systems.

The first chapter ends with a presentation of the possibilities for the application of fractal analysis in the field of optimization and improvement of the valuation of financial assets. According to the author of the study, the immediate applicability of fractal analysis in the field of valuation is still an underexplored territory in the field of finance, and for this reason, enriching the toolkit in the valuation process would lead to much more plausible and theoretically grounded valuations.

Two potential applications of fractal analysis in the field of valuation are presented - in the field of (1) traditional business valuation of enterprise shares through discounted cash flow models and (2) in the field of financial option valuation. The goal is to achieve and present the main points and problematic issues in the evaluation process, respectively the

presentation of the possibilities of applying fractal analysis to improve some of the controversial issues and overcome some of the assumptions that are inevitably made in the pricing process of some financial assets.

Empirical characteristics of financial data

The importance of analyzing and reviewing the empirical statistical characteristics of financial assets is determined by the author's position that in the analysis it is necessary to choose such an analytical approach or methodology that manages to explain the largest possible set of observed empirical characteristics of the studied phenomenon or object.

Despite the efforts of researchers and practitioners in their quest to mathematically construct a quantitative model that describes the reality as accurately as possible, until now all have succeeded at best in synthesizing the studied economic processes and dependencies in a basic order. However, the behavior of financial markets is characterized by a certain set of recurring regularities, the origin of which in practice cannot be proven through the construction of stable chains of causes and their resulting consequences. Therefore, the pursuit of causality reconstructing a certain phenomenon is a task of increased difficulty, bearing in mind that in the majority of cases analysts have limited access to information.

Statistical studies conducted in the field of finance regarding the behavior of prices and asset returns show unequivocal patterns occurring in different markets, geographical regions and types of traded assets. The main empirically observable statistical characteristics typical of most traded assets can be summarized, synthesized and presented as follows in the following table:

Table 4. *Basic statistical characteristics of exchange-traded assets*

Statistical characteristic	Description
Fat tails in the probability distribution of prices and their returns	Extreme values causing a distortion in the frequency distribution of prices and their returns leading to a discrepancy in the determination of the theoretical probability of their occurrence.
Convergence to a Gaussian distribution	For large samples of time series data,

as time scale increases	increasing the scale of measuring variation between two time periods leads to convergence to a normal probability distribution compared to shorter time intervals of measuring volatility.
Negative asymmetry of the third statistical moment	The mathematical interpretation of this is that the frequency of negative spikes is lower compared to the frequency of positive increases, but their relative magnitude is much greater compared to that of a positive trend.
Volatility clustering	The turbulent behavior of prices and their variation over time is manifested in cluster segments, which are not equally and evenly distributed within the studied time series population.
Leverage effect	It is related to the negative correlation of the volatility of the asset and the movement in its price.
Discontinuous price behavior	The pricing of traded assets by definition cannot be a continuous process over time. It is for this reason that modeling should take into account the spike behavior in prices due to their discrete nature.
Non-stationary volatility	Time-varying volatility is typical for almost all measurements made on different asset classes, regardless of the time scale of the measurement.

Deterministic and probabilistic models in finance

The explanation and prediction of the behavior of a certain phenomenon in the economy is always associated with a certain amount of uncertainty arising from many and various sources. It is the modeling of the uncertainty affecting the behavior of the phenomena that gives the same probabilistic characteristics. The concept of probability is very often difficult to grasp. Usually, in science, it is associated with the frequency of occurrence of a given phenomenon in the past, which means that the past regularity of the observed phenomenon is

allowed to be preserved in the future. This approach to measuring probability is known as the frequency or objective approach [Carroll \(2019\)](#). There is also a subjective approach that arises due to the fact that not all events have a high repeatability and therefore a frequency regularity cannot be derived. Subjective probability is part of the theory of Bayesian statistics. The Bayesian method will be actively applied in the field of forecasting the volatility of the underlying fractal pattern that will be used for analysis purposes.

Determinism originates from the concept of causality, which in its profound essence can be traced back to the classical philosophical works of [Hume \(2016\)](#), [Hume \(1738\)](#), [Popper \(1950\)](#) and [Laplace \(1902\)](#). In finance, classical deterministic or causal models are initially aimed at analyzing certain past events and assume that established relationships (including their strength) and patterns will persist in the future.

The opposite of deterministic models in finance are random or stochastic models and processes. Such an approach to analyzing the behavior of a given variable is due to several reasons: First, bearing in mind the quite realistic assumption that to begin with many of the analyzes are done in an environment of significantly missing or severely aggregated information, detailing and obtaining relatively reliable measurements of the stability of the dynamics of certain variables can be reasonably questioned. Second, there is an increasing interaction and complexity of the relationships between the units and the whole. One of the basic concepts in complex systems theory states that the behavior of the whole cannot be predicted from the behavior of its constituent parts (and vice versa). [Taleb \(2018\)](#) argues that interrelationships have a major role and are of greater importance than the basic characteristics of the constituent parts. Based on this logical sequence, it follows that the price of the asset is affected by a huge number of factors, many of which are latent. A purely deterministic approach to analysis and forecasting is therefore too generalizing, especially when non-linear relationships are present.

One of the most difficult and challenging areas in the modeling of stochastic systems is the calibration and description of the turbulence of the random component. Moreover, it can have a variable structure and be time dependent.

Initially, the mathematical modeling of the behavior of prices, respectively the return from investments in financial and real assets, is carried out on the basis of the assumption that the past values of the studied asset do not affect its current or future value. Such an assumption is built on the basis of a theoretical framework known in classical finance, such

as theory of efficient markets [Fama \(1970\)](#), which states that in financial markets all available information is reflected in the price of assets in a very short time (practically instantaneous) and therefore the past has no bearing in predicting the future price of the relevant asset. The mathematical description of the economic concept of efficient markets corresponds to the models from the family of the so-called Markov processes or Markov chains, which basically say that today's price of the asset depends only on yesterday's price, tomorrow's on today's price, etc. In the literature, there are also alternative theoretical constructions aimed at describing the fundamental driving forces shaping asset prices and the behavior of market participants. It is worth mentioning the theory of adaptive markets developed and systematized by [Lo \(2019\)](#), the hypothesis of fractal markets proposed by [Peters \(1994\)](#) and intertemporal equilibrium models, whose theoretical principles for explaining asset prices are related to the interrelationship between the investment and consumption decisions of investors. In other words, the methodology assumes that asset prices are predetermined by the collective portfolio decisions of investors regarding their future wealth within a period ahead in the future. Implicitly, the model assumes that economic agents consume all their wealth within the specified period. Of course, in reality investors make their plans with respect to their portfolio preferences for more than one period, bearing this in mind, modeling investment and consumer preferences in the context of multiple time periods needs to be done in parallel. According to [Campbell, Lo, MacKinlay \(1997\)](#), international equilibrium models used to model asset prices answer two very important questions: What causes determine the level of the risk-free interest rate and the level of the additional risk premium that investors expect from their investments. And the second question is addressed to the analysis and construction of an equilibrium model guiding the behavior of economic entities in terms of maximizing the utility of their investments in such a way as to explain non-stationary movements in returns and risk premiums required by market entities. Details and a summary of the mathematical postulates and techniques regarding the construction of interporal equilibrium optimization models can be found in the work of [Walde \(2012\)](#).

A number of other, often unrealistic, assumptions are embedded in classical quantitative finance, which are summarized in the table below.

Table 5. *Assumptions in the classical financial theory for the behavior of financial markets*

Assumptions in classical financial theory	Comment
Efficient Markets (Markov Process)	• For determining the future value of a given variable, only its current value is relevant. It corresponds to the "weak theory of efficient markets". • Lack of arbitrage opportunities.
Martingale	• The concept of fair game, all information is known to all market agents and no one is disadvantaged.
Cramer's rule	• Losses are more likely to come from an accumulation of multiple events rather than a single outlier
Normality and symmetry of the frequency probability distribution of prices and their returns	• Absence of extreme value in the data, easy derivation (and presence) of statistical moments.
Rational behavior of market participants	• Pursuit of maximum profit. • Maximizing the risk-return ratio.

The main types of approaches for describing trends, regularities and price behavior of various types of assets can be conditionally divided into two large groups: (1) those that explain a given process in order to gain an understanding of the sources and interrelationships determining and driving the price of the asset and (2) forecasting models (inference) in order to predict the values of the phenomenon at a certain future time. [Mandelbrot \(2008\)](#) argued that financial asset prices cannot be predicted in any useful and productive way, but risk has a structure that can be described mathematically. It is for this reason that the second group of models (the forecasting ones) in most cases do not reproduce a given point estimate of the price or, respectively, the return, but strive to imitate the real dynamic process characterizing the certain probability-weighted trajectory of the phenomenon

In financial econometrics, several approaches and a group of models are known, which are used to model financial and economic phenomena. They can be summarized as follows:

- Geometric Brownian motion;
- Jump-diffusion processes;
- Mean-reverting processes;
- Stochastic volatility models;
- Autoregressive Conditional Heteroskedasticity models (ARCH);
- Regime-switching models;
- Models from the family of machine and deep-learning and
- Fractal models.

Fractal models in finance

The fundamental starting point of fractal analysis, considered more generally, relies on the study of invariant statistical characteristics leading to the construction of time-stable classes of fractal patterns reproducing a certain aspect of the analyzed data. Invariance allows the modeling of price variation by means of a one-dimensional data-generating process, which leads to the possibility of constructing fractal models with a small number of parameters, which, in combination with the possibility of statistically justified assumptions describing the exact qualitative specificity of temporal stability, lead to the reproduction of price dynamics, which is not affected by the measurement frequency.

The application of fractal analysis in the field of finance marks its starting point from the studies of [Mandelbrot \(1963 and 1967\)](#) related to the behavior of price levels of various classes of financial and real assets. In the scientific literature, one can find numerous studies related to the robustness property of the behavior of statistical central moments. The studies of [Mandelbrot et al. \(1997\)](#), [Calvet and Fisher \(2002\)](#), [Bacry, Delour and Muzy \(2001\)](#). show that the central moments q of the absolute price changes $\mathbb{E}(|P(t + \Delta t) - P(t)|^q)$ (absolute price return) scale as a power function of the change in the time horizon. It is the results of these studies that give rise to the construction of the models from the family of multifractal diffuse processes.

Chronologically, the first fractal model was based on the Levi-stable distribution [Mandelbrot \(1963\)](#), which was aimed at quantitatively modeling the impact of extreme events on price variation. At a later stage, the fractional Brownian motion was developed by [Mandelbrot](#) and [Van Ness \(1968\)](#), which successfully reproduces the concept of the long-term autocorrelation dependence manifested in many of the financial data. Following the studies of [Mandelbrot \(1972\)](#) and [Mandelbrot et al. \(1997\)](#), in which it was presented and constructed, initially adding an element to the fractional Brownian motion, namely the subordination relationship of the multifractal measure of the trading time of financial assets, and later the model was further developed and a modified version appeared on its basis, namely the Multifractal Asset Return Model. At the end of the 20th and the beginning of the 21st century, the last basic variety of financial models from the family of fractals appeared – a Markov-switching multifractal model, developed by [Calvet](#) and [Fisher \(2004\)](#), as well as its many varieties.

A summary of the developed fractal models used in finance can be made as follows:

- Levy processes;
- Fractional Brownian motion;
- A multifractal model of asset returns;
- One-dimensional and n-dimensional Markov-switching multifractal model and
- Vector error correction Markov-switching multifractal model

Application of fractal processes in the process of valuation of enterprises through the models of the family of Discounted cash flows

The application of fractal analysis in the process of enterprise valuation using the Discounted Cash Flows model can be embedded by simulating the variables generating the main value carriers. Typically, this is sales revenue, but it is possible to model other variables that make up the cash flows. The stochastic variable to be modeled using one of the leading fractal models for analysis purposes is best suited to sales revenue.

The application of fractal models should not be done for its own sake, but on the basis of a preliminary analysis taking into account the individual specifics of the analyzed enterprise. For example, the revenue dynamics of enterprises that are in their mature phase of

development implies that their dynamics will be constant without sudden movements. Therefore, the application of fractal analysis in such hypotheses is limited, due to the fact that for such type of companies long-term mean reversion type processes are most suitable for applications. Modeling of revenue dynamics through fractal analysis is determined by their dynamic nature. Companies operating in an environment of increased uncertainty are most suitable precisely because fractal models manage to address the modeling of uncertainty in an appropriate way. Another challenge for the application of fractal analysis, and more specifically any of the specifics of fractal models, is the estimation of their parameters and the acquisition of sufficient analytical and detailed data.

Value of an option assuming a multifractal process driving the dynamics of the underlying asset

The second important area of application of fractal analysis is related to the construction of a consistent, logically consistent and maximally comprehensive methodology aimed at describing and defining the approaches, assumptions and issues related to the concept of pricing financial options and the possibilities of applying fractal analysis to improve and optimize some of the assumptions underlying pricing.

One of the most difficult tasks in the practical use of the option valuation approach in the field of investment management is the basic economic argument on which the valuation is built. It consists in constructing a "synthetic" portfolio that perfectly mimics the payoff function of the option. Moreover, the need for dynamic rebalancing, in theory continuous over time, is a fundamental postulate, the result of which is to eliminate all systemic risk and guarantee risk-neutral returns. Fulfilling all these conditions is practically impossible. An additional difficulty is also the definition of a correct and plausible dynamic process of the underlying asset, other than log-normal, whether the option is of the European or American type, the presence of additional transaction costs associated with the need for the dynamic hedging of the replicating portfolio, the availability of quality and reliable information, market efficiency expressed in the absence of arbitrage opportunities, rational behavior of market participants and others.

The search for a balance between the complexity and variety of used, both statistical techniques and abstract financial concepts, and the risk that the entire methodology becomes a "black box" that loads and produces finite but incomprehensible results is an important

condition to which must be approached carefully. Still, the mathematical toolkit is limited in terms of deriving a unique solution to a differential equation driven by a stochastic process that is different from traditional Brownian motion. However, it can be shown that for some classes of fractal models, the asset price process is semimartingale, from which it follows that a stochastic integration of an option payoff function with respect to the fractal process is possible, hence the same is possible to be implemented in option pricing and evaluation. In addition, there are certain mathematical techniques presented in the work of [Nunno and Oksendal \(2011\)](#) by which Fractal Brownian Motion can be integrated over a given function, but the complexity in terms of intuitive interpretation and practical application of such techniques remains high.

3.3. Chapter two – Modeling and forecasting volatility of financial assets using multifractal analysis

The second chapter of the dissertation contains a wide-ranging empirical and econometric analysis directed and aimed at the verification of the main scientific hypothesis, namely acceptance or rejection of fractal models, as sufficiently good measures of the dynamics and uncertainty manifested in the financial markets compared to some of the most frequently cited and used leading models to describe and forecast price trajectories and their returns. All models subject to the study are loaded with data of financial and real exchange-traded assets of different nature and time length.

For the purposes of the analysis, the methodological framework will be built, according to which the starting points resulting from the objective condition and the need for component decomposition and mathematical description of abstract concepts and their reduction to quantifiable orders will be defined in order to apply the scientific empirical method. At the beginning, a definition of the theoretical components determining the return of a given asset is made, and next, the necessary assumptions and limiting conditions, which will remain outside the scope of the dissertation work, are presented.

The particular specification of the fractal model, namely the binomial continuous version of a Markov-switching multifractal model, is presented in detail. In addition to the mathematical construction of the model, a review of the literature sources devoted to the application of the chosen specification of the fractal model in the field of finance was also made. Next, the comparative models serving as a sample group were selected, against which

the presentation of the fractal model will be compared. The sample group of models consists of seven different model specifications from the Autoregressive conditional heteroskedasticity family.

Construction of the multifractal model

The Markov-switching multifractal model is a combination of concepts that are related to both fractal analysis and the class of models called regime switching originally constructed and proposed by [Hamilton \(1989\)](#). Applied empirical studies of the model are mainly focused on the field of forecasting the volatility of foreign exchange markets, see [Calvet and Fisher \(2004\)](#), [Calvet et al., \(2004\)](#) and [Lux \(2008\)](#); on capital markets, see: [Calvet and Fisher \(2005, 2008\)](#), [Lux et al., \(2011\)](#) and [Chaung et al. \(2013\)](#) and the problem of hedging risk in futures markets [Alausa \(2014\)](#). The switching multifractal Markov model was developed by [Calvet and Fisher \(2008\)](#) and is a fractal model of the stochastic volatility family, where the conditional volatility is a multiplicative function of: (1) a finite number of $\bar{k}$ components $M_{1,t}, M_{2,t}, \dots, M_{\bar{k},t}$ the "switching" of each of which is guided by hierarchically heterogeneously decreasing frequencies (probabilities) $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\bar{k}}$; (2) the multiplicative components are scaled with a positive parameter σ^2 measuring the unconditional variation of returns. The full parameterization of the continuous binomial $MSM(k)$ is characterized by a four-parameter vector $\psi \equiv (m_0, b, \gamma_{\bar{k}}, \sigma) \in \mathbb{R}_+^4$, where:

- $m_0 \in (1, 2]$: determines the magnitude of each volatility component;
- $b \in (1, \infty)$ and $\gamma_k \in (0, 1)$ define the set of migration probabilities of each volatility component;
- $\sigma \in [0, \infty]$: is the mean standard deviation.

Sample group models

In 1982, [Engle \(1982\)](#) constructed a model to study asset volatility, more commonly known as the autoregressive conditional heteroskedasticity (ARCH) process. Subsequently, numerous authors and researchers have developed different variants of the aforementioned model to capture and adjust for certain differences in the statistical characteristics of the data. The models developed based on Engel's idea are part of a larger family of volatility modeling approaches, namely stochastic volatility models. They successfully capture and reproduce

some of the key statistical phenomena of financial data – the cluster effect of volatility, autocorrelation effects, as well as the leverage effect.

For the purposes of the study, the main used control models were selected, namely - **ARCH, GARCH, EGARCH, GJR-GARCH, TARCH, APARCH and FIGARCH.**

Diagnostic criteria

In the final part of the second chapter, the selected quantitative criteria are presented, on the basis of which the explanatory power of the models was evaluated from the point of view of: The degree of their convergence to the real data and the Assessment of their prognostic power.

The first part is dedicated to analyzing the models against the training sample - respectively, the presentation of the leading diagnostic criteria for comparative analysis of the performance of the different models and selection of the one with the highest explanatory power. More specifically, a series of quantitative statistical measures and comparative analysis was performed between the multifractal models and the selected control group of models - the value of the log-likelihood function, Vuong's test, Akaike's information criterion, Schwartz's information criterion (Bayesian information criterion).

The second part is aimed at analyzing the performance of the models within the forecast sample and the assessment of the best results reproduced by the models compared to the actual empirical observations of the selected indicator of the relevant asset. The quality of the prognostic performance against the selected prognostic sample is achieved through the application of Mincer-Zarnowitz regression and simulation-visual analyses.

3.4. Chapter three – Main results and scientific achievements

The third chapter of the study is devoted to the presentation of the results of the defined methodological framework up to this point.

At the beginning of the chapter, the data used for the purposes of the study are presented and defined. The need for a preliminary and, to a large extent, in-depth statistical analysis of the selected data is conditioned by the acquisition of both a basic statistical understanding and a visual interpretation of latent and complex statistical indicators,

structural interrelationships, empirical states and anomalies manifesting in the selected types assets.

The final part of the chapter presents the results of the pre-selected diagnostic tests for evaluating the parameters of the models and their convergence to the data from the training sample of the time series. A comparative analysis was made between the results of the best multifractal model and the three best comparative models selected by the defined diagnostic criteria. In conclusion, statistical tests evaluating the prognostic power of the multifractal model for a period of up to one year were performed, as well as simulations of the data generated by the multifractal model.

Data used and preliminary statistical analysis

The object of the study will be the return of the price of Brent crude oil (Oil), the price of shares of EXXON MOBILE (XOM), the main Bulgarian stock market index SOFIX, the price of BITCOIN denominated in dollars, the exchange rate of the Euro-Dollar pair (EUR_USD) and the value of the Standard and Poors 500 stock index (S&P_500).

It will be used the logarithmic continuous daily return of the values of the selected assets, defined as follows:

$$r_t = 100 \times [\ln(P_t) - (P_{t-1})]$$

For the purpose of estimating the parameters of the models and constructing consistent quantitative criteria for determining the predictive power for each of the time series, two samples will be determined. One will serve to load and estimate model parameters (in-sample), and the other will serve for comparative analysis between forecasted values and actual realizations (out-of-sample).

The table below provides a summary of the input data for the in-sample with which the models will be loaded.

Table 6. *Basic characteristics of the input data*

Asset class	Measurement	Frequency	In-sample time series	Observations	Adjusted observations ²
Oil_Brent	Natural logarithmic return	daily	23/08/2000 – 21/07/2022	5499	5474
EXXON MOBILE (XOM)	Natural logarithmic return	daily	02/01/1962 – 21/07/2022	15241	14383
SOFIX	Natural logarithmic return	daily	17/10/2000 – 21/07/2022	5393	5358
BITCOIN	Natural logarithmic return	daily	17/09/2014 – 21/07/2022	2863	2861
EUR_US D	Natural logarithmic return	daily	01/12/2003 – 21/07/2022	4833	2277
S&P_500	Natural logarithmic return	daily	22/01/1990 – 21/07/2022	8185	7687

Source: Yahoo Finance

Quantitative Fractal Analysis

An important area within the second chapter is the exploration of the possibility of the application of fractal analysis, as a means of quantitatively enriching the toolkit of analysts through the definition of basic fractal metrics. At the same time, a comparative analysis was made between the classical quantitative indicators used by financial analysts and their analogues arising from the fractal science and concept. In addition, the restrictive assumptions adopted will frame the analysis to the exposure of the main descriptive indicators based on the observed historical data. The goal is to conclude whether fractal metrics are consistent with the main statistical indicators used in dynamic time series analyzes of financial data.

The following three main fractal metrics have been calculated for the assets under analysis:

- The parameter alpha – the same is one of the four main parameters characterizing the power probability distributions and, more specifically, in the present part, the coefficient is estimated based on a stable Levy distribution (Levy-Stable distribution);
- The fractal dimension and

² The number of observations used to load the models and estimate their parameters is lower compared to the number of actual observations, since for modeling purposes it is required to exclude the consecutive observations in which there is no price movement and accordingly their relative changes are with zero values.

- Hurst exponent.

Fractal analysis enriches the analytical toolkit to the greatest extent precisely by adding an additional measure of risk, which is related to the more precise and plausible measurement of probability in the tails of the probability distribution. In other words, quantifying and taking into account the empirical observable data for a significantly higher frequency of occurrence of rare events affecting the entire population, compared to those predicted by classical models. This is the so-called parameter alpha, which is precisely the measure defining the probability in the tail of the frequency distribution of the returns of the specified asset.

Using the main quantitative measures resulting from the application of fractal analysis – the alpha coefficient, the fractal dimension and the Hurst exponent for the selected assets, it can be concluded that SOFIX has the highest Hurst coefficient compared to the other asset classes, indicating that the index exhibits a high degree of sustainability and presence of a distinct trend. The lowest alpha coefficient values (those approaching unity) are observed for SOFIX and BITCOIN, indicating the increased probability of occurrence of single extremes in the two assets that disproportionately affect the entire population. On the other hand, EXXON MOBILE shares and the Euro-Dollar currency pair have the highest values close to two, which values are reported in the normal probability distribution. As for the fractal dimension, which can be interpreted as a measure of the roughness of the price dynamics, therefore an analogue of the risk manifested by the respective asset, the highest values are observed for EXXON MOBILE shares, the euro-dollar currency pair and the S&P 500 index.

Research results for the in-sample data

The results show that the multifractal model with ten frequencies outperforms the comparative models of the sample group for the data of the Bulgarian SOFIX index, the oil price return (OIL), the EXXON MOBILE stock return, and the BITCOIN price return. The multifractal model with nine frequencies has the best performance for the data of the currency pair (EUR-USD). Of all the assets analyzed, only the S&P 500 stock return data were best fit by the asymmetric version of the autoregression conditional (TARCH) model, with the critical value from this model showing that at almost 50% significance level, the model does not differ significantly from the asymmetric power ARCH. For the S&P 500 data, the

multifractal model is found to underperform the three control models in terms of fit to the data.

Research results for out-of-sample data

As a result of Mincer-Zarnowitz regression and simulation-visual analyses, the following more important conclusions can be drawn:

- For part of the assets (SOFIX and the price of "Brent" oil), the multifractal model generates short-term forecasts between 20 and 60 days, which are practically identical to those actually observed.
- Visually simulated daily asset returns against appropriately estimated parameters of the multifractal model manage to reproduce the main statistical indicators and phenomena typically occurring in reality. The graphs resemble the real data, with a more detailed look at the SOFIX index. Moreover, the simulated data from the multifractal model differ significantly from those generated by the classical probabilistic process used in most risk metrics and theoretical assumptions underlying the main financial theories, which is direct evidence of the potential of fractal models for the purposes of developing and optimizing financial theory so that it reflects actual processes in a more representative and productive way.

The conclusions arising from the analysis presented in the second chapter fully confirm the superiority of the selected multifractal model over the selected best and often cited econometric models in the scientific literature. This is practically a prerequisite for the potential that fractal models have and their application in analyzing the dynamics of financial markets. Moreover, the fractal metrics presented in the chapter show that they can serve as a complementary tool for descriptive analysis and providing a more plausible and complete picture to characterize the state of financial assets.

4. Conclusion

The impossibility of classical financial theory and models to describe in the desired depth and precision the phenomena of our surrounding reality is the basis of the study of the possibilities of applicability of fractal geometry in finance and risk. Fractal analysis provides an alternative point of view and a complementary analytical apparatus claiming the more

plausible connection of empirical phenomena with a quantitative measure summarizing to the maximum extent their behavior and dynamics. This analytical apparatus has the potential for development not only in the field of analysis of the behavior of financial markets, both retrospectively and prognostically, but also in the subfields related to the evaluation of derivatives, risk management and measurement, and others.

The results of the research in the dissertation work achieve their goals expressed in giving an answer to the predefined working hypotheses, as follows:

Hypothesis 1: The selection of a certain probabilistic process, which is able to reproduce a large part of the statistical indicators manifested in the financial markets, is an approach that predetermines the optimization of the analysis process of a given economic variable due to the fact that preliminary studies and familiarization with the studied are not necessarily necessary phenomenon. Fractal analysis and its application in economics, and in particular finance, has the potential to become a powerful tool for describing and forecasting asset price dynamics. The presentation of the selected fractal pattern in the present study by the reproduction of simulated artificially created price trajectories, which are visually indistinguishable from the actual observed data, proves the above statement. In this sense, the hypothesis is confirmed.

Hypothesis 2: The advantages of the considered fractal model, compared to some of the best and frequently used econometric models, are significantly higher from a statistical point of view. The diagnostic criteria used to evaluate the stability of the model confirm that the data are explained in a better way by the multifractal model compared to the selected control group of models. The research presented in the dissertation confirms the hypothesis.

Hypothesis 3: The calculation of the main fractal meters in relation to the studied assets show results that are the hallmark of:

- The probability of large movements in the value of assets are much higher than those predicted if standard financial-statistical analysis tools are used;
- Risk measured by the fractal dimension is comparable to that calculated by volatility (standard deviation) and
- Hurst's exponent indicates an increased degree of construction of a prospective model with high predictive power due to reduced stochasticity in the data and distinct trend.

The hypothesis is confirmed and it can be said that the metrics resulting from fractal analysis provide a complementary perspective to analyzing the risk structure of financial assets.

Hypothesis 4: Proceeding from the results confirming the advantages of fractal models in analyzing the dynamics of financial assets, including the successful reproduction of simulated data that do not differ from those actually observed, it is reasonable to assume that the integration of fractal analysis in the valuation processes of companies' shares and option pricing, would lead to improved and optimized bottom line value. The author of the study has looked in detail at the sub-areas within the assessment process where the suitability of fractal analysis can be used, suggesting and highlighting specific actions that can be taken to arrive at a more reasoned and logical assessment procedure. It is concluded that the application of the fractal approach in these two areas of valuation (of company shares and options) would in theory help to optimize the valuation process, but the additional complications that arise at the same time remain tasks for future research.

Therefore, the working hypothesis cannot be fully confirmed due to the lack of definitive empirical results comparing the evaluation processes using fractal analysis and classical evaluation approaches and methods.

5. Scientific contribution of the dissertation

As a result of the research conducted within the dissertation, the scientific contribution of the dissertation can be summarized as follows:

- In the assumptions related to the analysis of financial markets and economic phenomena in an environment of uncertainty regarding the quality and reliability of available data, including the impossibility of obtaining a structural understanding of the functional dependence of the relationships between economic agents, the author comes to the conclusion that the scope of fundamental analysis is limited by definition and therefore the thesis is adopted that reconstructing the statistical characteristics of the price-generating process through the use of probabilistic processes represents a more plausible and qualitative approach to analysis.

- Fractal stochastic processes are proven to explain to a much higher degree the statistical empirical characteristics of almost all financial assets analyzed in the study compared to a leading control group of econometric models.
- It is proven that the selected multifractal model makes predictions of the structure of the variation of part of the studied assets in the short term (from 5 to 40 days), which do not differ statistically from the actual realized values.
- It is concluded that the main fractal metrics originating from fractal analysis can serve as a complementary toolkit to traditional quantitative financial metrics, with the help of which more informed and truthful conclusions can be drawn about the risk structure and dynamics of financial variables.
- The possibility of the application of fractal analysis in areas of financial science is presented, which would lead to improvement and optimization of the processes related to asset valuation, risk management, allocation and construction of optimal investment portfolios, banking and other areas. In particular, opportunities for the implementation of fractal analysis in the field of valuation of company shares through the use of the model of discounted cash flows and the pricing of financial options are presented.

6. List of publications of the PhD student

- Rangelov, P. 2024. Markov Switching Multifractal Model: Simulating the Risk Profile of the Bulgarian Financial Market. Conference proceedings from 18th International Scientific Conference of Young Scientists on the topic “The Economy of Bulgaria and the European Union: Inflation, Fiscal Consolidation and Sustainable Development”, page 248-261.
- Nenkov, D., Hristozov, Y., Rangelov, P. 2023. Actual problems of determining the value of shares in the capital markets. For example, the developed capital markets and the developing capital market in Bulgaria. *UNWE, Sofia*.
- Rangelov, P. 2023. Application of Fractal Geometry in Studies of the Bulgarian Financial Market. „*Economic and Social Alternatives*” *University of National and World Economy, Sofia, Bulgaria, Issue 2, p. 81-98*.

- Rangelov, P. 2022. Real Options Valuation under Different Dynamics of the Underlying Asset „*Economic and Social Alternatives*“, *University of National and World Economy, Sofia, Bulgaria, Issue 3, p. 131-151.*
- Rangelov, P. 2022. Application of Simulation-based Approach for Determining the Value of Companies Operating in an Environment of Uncertainty. „*Economic and Social Alternatives*“, *University of National and World Economy, Sofia, Bulgaria, Issue 1, p. 111-131.*

7. Bibliography – sources cited in the summary of the dissertation

- (1) Hume, D. 2016. A Treatise of Human Nature. *Publisher East-West.*
- (2) Alausa, W. B. 2014. Dynamic Futures Hedging with a Vector Error Correction Markov Switching Multifractal Model. Available at SSRN: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2523019
- (3) Bacry, E., Delour, J., Muzy, J. F. 2001. Modelling financial time series using multifractal random walks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 299, issue 1, 84-92.
- (4) Carroll, S. 2019. Where Quantum Probability Comes From, *Quantamagazine* (<https://www.quantamagazine.org/where-quantum-probability-comes-from-20190909/>)
- (5) Campbell, J. Y., Lo, A.W., MacKinlay, A.C. 1997. The Econometrics of Financial Markets, Princeton University Press.
- (6) Calvet, L., Fisher, A. 2002. Multifractality In Asset Returns: Theory and Evidence. *The Review of Economics and Statistics*, Vol. LXXXIV, No. 3, 381-406
- (7) Calvet, L. E., Fisher, A. J. 2004. How to Forecast Long-Run Volatility: Regime Switching and the Estimation of Multifractal Processes. *Journal of Financial Econometrics* 2(1): 49-83.
- (8) Calvet, L. E., Fisher, A. J., Thompson, S. B. 2004. Volatility Comovement: A Multifrequency Approach. *NBER Working Paper No. t0300*, Available at: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=583421.

- (9) Calvet, L. E., Fisher, A. J. 2005. Multifrequency News and Stock Returns. *NBER Working Paper No. w11441*, Available at: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=752019.
- (10) Calvet, L., Fisher, A. 2008. *Multifractal Volatility: Theory, Forecasting and Pricing*, Elsevier Inc.
- (11) Chuang, W.-I, Huang, T.-C, Lin, B.-H. 2013. Predicting Volatility Using the Markov-Switching Multifractal Model: Evidence from S&P 100 Index and Equity Options. *North American Journal of Economics and Finance* 25 (2013), 168-187.
- (12) Engle, R. F. 1982. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, Volume 50, Issue 4 (Jul.,1982), 987-1008.
- (13) Fama, E. F. 1970. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *The Journal of Finance*, Vol. 25, No. 2; Blackwell Publishing for the American Finance Association.
- (14) Hamilton, J. D. 1989. A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. *Econometrica*, Vol. 57, No. 2 (March,1989), 357-384.
- (15) Hume, D. 1738. *A Treatise of Human Nature. The Clarendon Edition of the Works of David Hume*, Oxford University Press.
- (16) Laplace, Pierre-Simon. 1902. *A Philosophical Essay on Probabilities*. New York: J. Wiley; London: Chapman & Hall.
- (17) Lo, A. 2019. *Adaptive Markets: Financial Evolution at the Speed of Thought*, Princeton University Press.
- (18) Lux, T. 2008. The Markov-switching multifractal model of asset returns: GMM estimation and linear forecasting of volatility. *Journal of Business and Economic Statistics* 26, 194–210.
- (19) Lux, T., Morales-Arias, L., Sattarhoff, C. 2011. A Markov-Switching Multifractal Approach to Forecasting Realized Volatility. Kiel Working Paper 1737, Kiel Institute for the World Economy, Hindenburgufer 66, 24105.
- (20) Mandelbrot, B. B. 1963. The Variation of Certain Speculative Prices. *The Journal of Business*, Vol. 36, No. 4 (Oct., 1963), pp. 394-419.

- (21) Mandelbrot, B. B. 1967. The Variation of Some Other Speculative Prices, *Journal of Business* 40, 393-413.
- (22) Mandelbrot, B. B., Van Ness, J. 1968. Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications. *SIAM Review* Vol. 10, No. 4, October 1968, 422-437.
- (23) Mandelbrot, B. B. 1972. Statistical Methodology for Nonperiodic Cycles: From the Covariance to R/S Analysis. *Annals of Economic and Social Measurement*, 1, 259-290.
- (24) Mandelbrot, B., Fisher, A., Calvet, L. 1997. The Multifractal Model of Asset Returns. *Cowles Foundation discussion paper no. 1164, Yale University*.
- (25) Mandelbrot, B.B., Hudson, R.L. 2008. The (mis)Behavior of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward. *Basic Books*.
- (26) Nunno, G., Oksendal, B. Editors. 2011. Advanced Mathematical Methods for Finance. *Springer*.
- (27) Peters, E. E. 1994. Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics. *John Eiley&Sons, Inc.*
- (28) Popper, K. R. 1950. Indeterminism in Quantum Physics and in Classical Physics. *The British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. 1, No. 2 (Aug., 1950), pp. 117-133.
- (29) Taleb, N.N. 2018. Skin in the Game: Hidden Asymmetries in Daily Life. *Random House*.
- (30) Walde, K. 2012. Applied Intertemporal Optimization. *Know Thyself – Academic Publishers*.